Colección Cuaderno de Cátedra Nº 2

Teoría de juegos y estrategia

UFG
UNIVERSIDAD
FRANCISCO GAVIDIA
Tecnología, Innovación
y Calidad

ELNER CRESPIN ELÍAS

COLECCIÓN CUADERNO DE CÁTEDRA Nº 2

Teoría de juegos y estrategia

UFG
UNIVERSIDAD
FRANCISCO GAVIDIA
Tecnología, Innovación
y Calidad

ELNER CRESPIN ELÍAS

Teoría de juegos y estrategia

Élner Crespín Elías

Primera edición 2014

658.8

C921t Crespín Elías, Elner Osaín, 1968-

Teoría de juego y estrategía / Elner Crespín Elías. -- 1ª ed. --

sv San Salvador, El Salv. : UFG Editores, 2014

138 p. ; 22 cm.

ISBN 978-99923-47-49-2

1.Decisiones empresariales. 2. Administración de empresas. 3. Éxito empresarial. I. Título.

Oscar Picardo Joao.
Director del Instituto de Ciencia, Tecnología e Innovación (ICTI).
Universidad Francisco Gavidia.

Oscar Martínez Peñate.
UFG-Editores.

Alejandra Serrano.
Diseño editorial

Publicado por UFG-Editores

UFG-Editores

UNIVERSIDAD FRANCISCO GAVIDIA

Calle El Progreso Nº 2748, Col Flor Blanca.

San Salvador, El Salvador Centroamérica.

Tel.: (503) 2249-2716

Correo electrónico: investigacion@ufg.edu.sv

Sitio web: www.ufg.edu.sv

UFG
UNIVERSIDAD
FRANCISCO GAVIDIA
Tecnología, Innovación
y Calidad

Tabla de contenido

Introducción

La Teoría de Juegos es una rama de la Economía, sustentada en las matemáticas, que estudia las decisiones de un individuo o de una empresa, quienes para tener el éxito buscado deben tener en cuenta las decisiones tomadas por el resto de los agentes que intervienen en una situación determinada o en un juego estratégico; de la misma manera, los demás agentes actuarán pensando según crean que van a ser nuestras actuaciones. Se analizan los métodos de actuación y comportamiento de las personas con base en predicciones que las personas hacen de las decisiones de los otros participantes en el juego estratégico.

La Teoría de juegos se aplica todos los días en el campo empresarial, al tomarse decisiones no solamente basadas en los posibles beneficios inmediatos que podríamos obtener, sino en las reacciones y estrategias que nuestra competencia podría adoptar ante la decisión que hemos tomado como empresa.

En el análisis microeconómico convencional dos paradigmas de comportamiento empresarial son el de la competencia perfecta y el del monopolio. Estos dos casos tienen algo en común: pueden analizarse ignorando el comportamiento de los rivales. En el caso del primero hay tantas empresas, y cada una es tan pequeña en relación con el mercado, que se comportan bajo el supuesto de que sus decisiones no tendrán efecto perceptible sobre las otras empresas. En el caso del monopolio, la empresa puede ignorar a sus rivales porque simplemente no existen. Estos dos casos son extremos; sin embargo, existe una gama intermedia en los que la interacción entre las empresas es importante.

En la década de los años 40, John von Neumann y Oskar Morgenstern hicieron contribuciones pioneras a la teoría de juegos, quienes estaban convencidos de que los problemas característicos en el comportamiento económico eran idénticos a los que llamaban juegos de estrategias. Cincuenta años después, tres científicos continuaron esta labor, a quienes les otorgaron el Premio Nobel de Economía 1994: John Nash, John Harsany y Reinhard Selten. Nash introdujo el concepto de equilibrio más utilizado en la teoría de juegos, el tema de juegos de suma cero (Neumann y Morgenstern) y juegos de suma no cero (si un jugador gana no necesariamente supone que el otro pierda). Selten perfeccionó las ideas de Nash para adaptarlas a los llamados juegos dinámicos (donde el juego se desarrolla a lo largo del tiempo), y Harsany lo hizo con los juegos con información incompleta (donde algunos jugadores no conocen con certeza lo que pueden hacer o las preferencias de los otros jugadores).

La teoría de juegos es útil para analizar el comportamiento económico y social, donde existen diferentes personas (agentes), cada uno con sus propios objetivos, en una situación de interdependencia. En efecto, la Teoría de Juegos analiza situaciones en donde las decisiones que toma una persona pueden afectarla de manera muy distinta dependiendo de las decisiones de otras personas; es decir, existen otros tomadores de decisiones, actuando conforme a sus propios intereses, que deben ser considerados.

Existe un conjunto de jugadores, y las decisiones de todos ellos, conjuntamente, determinan qué resultado obtendrá cada uno. Considérese el lanzamiento de un producto bancario (una tarjeta de crédito) con tasas de interés menores a los de la competencia. En este caso la competencia no se quedará de brazos cruzados, ocasionaría una reacción que podría traducirse en beneficios para los deudores de tarjetas. Los bancos pueden actuar cooperando entre ellos, y otras veces compitiendo unos contra otros, este es un comportamiento estratégico.

La Teoría de Juegos es el estudio de problemas multipersonales de decisión. En Economía son frecuentes estos tipos de problemas, por ejemplo en situaciones de oligopolio, donde cada empresa debe tomar en cuenta lo que harán los demás agentes.

La teoría de juegos tiene influencia en ciencia política, sociología, biología y otras ciencias sociales. Hay otras aplicaciones en los campos microeconómico, modelos de intercambio (negociación y subasta); en la economía financiera se utiliza en modelos de comportamiento de las empresas en los mercados, o para dilucidar problemas de decisión multipersonales dentro de las empresas: trabajadores compitiendo por un ascenso, departamentos compitiendo por los mismos recursos; en el campo de economía internacional se utiliza en modelos en los que los países compiten (o coluden) en sus decisiones arancelarias, posible aprobación de un tratado de libre comercio; en macroeconomía, para analizar los resultados de la política monetaria cuando el Gobierno y los agentes que determinan los salarios o los precios se comportan estratégicamente; en política, para analizar las estrategias que utilizan los partidos políticos en los procesos electorales.

I
Tipos de juegos

Existen cuatro tipos de juegos: juegos estáticos con información completa, juegos dinámicos con información completa, juegos estáticos con información incompleta y juegos dinámicos con información incompleta. Un juego tiene información incompleta si un jugador no conoce las ganancias de otro jugador, como ocurre en una subasta cuando uno de los licitadores no sabe cuánto está dispuesto a pagar otro licitador por el bien subastado. En correspondencia con los cuatro tipos de juegos, hay cuatro nociones de equilibrio: Equilibrio de Nash, Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, Equilibrio bayesiano de Nash y Equilibrio bayesiano perfecto.

Cuadro 1: Clasificación de los tipos de juegos

Tipo de juego	Información completa	Información incompleta
Estático	Equilibrio de Nash	Equilibrio Bayesiano de Nash
Dinámico	Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos	Equilibrio Bayesiano Perfecto

Fuente: Elaboración propia.

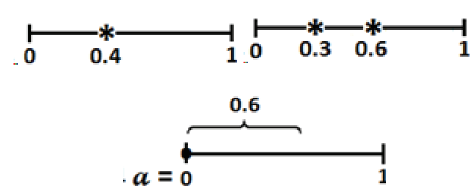
¿Qué otras situaciones implican un comportamiento estratégico? Consideremos situaciones donde la ubicación y el número de establecimientos influyen sobre las ventas

1.1 Dilema de una empresa única en un mercado proteccionista[1]

Supuestos:

1. La ciudad se extiende a lo largo de una avenida.
2. La empresa desea ganancias altas.
3. Por cada tienda debe pagar $8,000.00.
4. El número de tiendas y ubicación influyen en las ventas.
5. Obtiene ganancias brutas de $20.00 /u.v. G= $20 * Ventas (u.v.) - ($8000 * Número de Tiendas).
6. Los consumidores potenciales compran <=> (viven a una distancia, d ≤ 0.6 de una tienda).
7. Se obtienen ventas , 0 ≤ ventas ≤ 1000

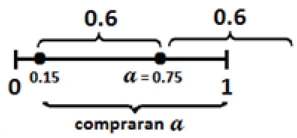
Decisión: ¿Cuántas tiendas instalar y dónde ubicarlas?.



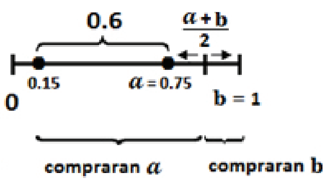
- Si instala una tienda en a = 0 entonces le compraran entre 0 y 0.6 entonces sus ventas serán del 60% de la demanda (600).

1 Es un caso de proliferación de variedades, comportamiento estratégico Game Theory, Jorge Hernández.

- Si se ubica en ***a*** = 0.75 le comprarán entre 0.15 y 1.0 y venderá el 85% de la demanda (850 unidades).



- Si quiere instalar 2 tiendas, por ejemplo podría ubicarse en ***a*** = 0.75 y ***b*** = 1



- Los consumidores a la izquierda de 0.15 seguirán sin comprar.
- A tienda ***a*** le comprarán entre 0.15 y 0.875 y venderá el 72.5% (725 u).
- A tienda ***b*** le comprarán entre 0.875 y 1.0 y venderá el 12.5% (125 u).

Así, si la empresa 1 es la única autorizada para operar, pondrá una sola tienda en el centro de la ciudad. Así garantizará que todos le compren, y obtiene un beneficio de:

B (empresa 1) = 20(1000) - 8000 = $12000

La empresa 1 se despreocupa de los rivales (asume un comportamiento no estratégico).

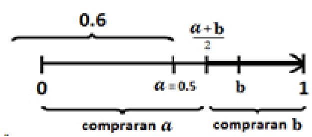
¿Qué pasa si una empresa 2 es autorizada? Entonces las decisiones de la empresa 1 serán diferentes, porque deberá tomar en cuenta a su rival.

Las decisiones de la empresa 1 para disuadir al rival podrían ser:

a. Ubicar una tienda, podría ser en el centro de la ciudad.

b. Ubicar dos tiendas apropiadamente para cubrir mercado.

a) Si la Empresa 1 ubica una tienda en el centro (***a*** = 5), ignorando a la Empresa 2, y si la Empresa 2 ubica la tienda en $b > \frac{1}{2} \Rightarrow$ le compraran a la empresa 2, todos los consumidores a la derecha de ***b*** y a la mitad entre ***a*** y ***b***, es decir desde el punto $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ al punto ***b***.



Puede observarse que la Empresa 2 aumenta sus ventas si se acerca a la Empresa 1, al punto ***a***=0.5 , porque tiene más consumidores a la derecha (logra quitarle a la Empresa 1 más consumidores situados entre las dos tiendas).

Así las ventas de la Empresa 2 alcanzan su valor máximo cuando está lo más cerca posible de la Empresa 1.

Si llamamos **ε** a la mínima distancia que puede existir entre las dos tiendas (0.5 + **ε**) y supongamos que **ε**=0 (**ε** puede ser extremadamente pequeño). Entonces la Empresa 2 se llevará todos los clientes a la derecha de ***a***=0.5 (es decir la mitad del mercado) y obtendrá un beneficio de:

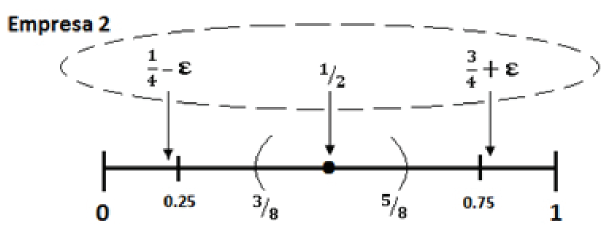
B (Empresa 2) = 20(500) - 8000 = $ 2,000

Así cada empresa obtiene la mitad del mercado.

Veamos el comportamiento estratégico de la Empresa 1.

La Empresa 1 sabe que existe otra empresa, que sus acciones influirán sobre las acciones de la Empresa 2, entonces puede anticipar que si ubica una tienda en ***a***=0.5 , entonces la Empresa 2 pondría la tienda contigua a la suya y ambos obtendrían beneficios iguales ($2000).

b) Ahora, también puede examinar la alternativa de ubicar 2 tiendas. Si la Empresa 1 ubica dos tiendas, podría ubicarlas en los puntos $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ ¿Cuánto mercado captará la Empresa 2?



i. Si la Empresa 2 se ubica en $\frac{1}{4} - \varepsilon$ puede ganar la demanda a la izquierda del punto ***a***=0.25.

ii. Si la empresa 2 se ubica en $\frac{3}{4} + \varepsilon$ puede ganar demanda a la derecha de 0.75.

iii. Si se ubica en $b = \frac{1}{2}$, se llevará la demanda ubicada entre $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$; venderá $\frac{1}{4}$ de la demanda.

Entonces la Empresa 2 obtendría un beneficio de:

B (empresa 2) = 20(250) - 8000 = -$3000

Entonces la Empresa 2 no entrará.

Por lo tanto, la Empresa 1 pondrá 2 tiendas, en ***a***=0.25 y ***a***=0.75, con lo cual disuadirá la entrada de la Empresa 2, se quedará en todo el mercado y venderá 1000 unidades, con un beneficio de:

B (empresa 1) = 20(1000) - 2 (8000) = $4000

1.2 Juegos estáticos con información completa

Se consideran juegos simples con las características siguientes: los jugadores forman decisiones simultáneamente[2]; reciben sus ganancias (que dependen de la combinación de acciones que eligen); son juegos con información completa, dado que la función que determina la ganancia de cada jugador a partir de la combinación de acciones elegidas por los jugadores es conocida por los jugadores.

Se dice que la información es completa porque todos los jugadores conocen todos los componentes del juego3. Para definir un juego de este tipo necesitamos especificar, i) quiénes son los jugadores, ii) qué decisiones puede tomar cada jugador, iii) combinación de decisiones posibles.

El juego conocido como “Piedra, papel o tijera” es un ejemplo de un juego estático; “Pares o nones” es otro ejemplo. Es simultáneo porque cada persona no toma más de una decisión, y la toma sin saber lo que harán los demás.

2 Cada jugador toma su decisión sin conocer las decisiones de los demás jugadores, y el conjunto de estas decisiones determina el resultado del juego. Los jugadores nunca más interactúan

3 Como complemento, se tienen los juegos con información incompleta, aquellos en los cuales algún jugador no está seguro de la función de ganancias del otro jugador.

¿Cómo sería la matriz de pagos en el juego "Piedra, papel o tijera"? Supongamos que todo jugador prefiere ganar a empatar, y empatar a perder. En tal caso, unos posibles pagos que representan este juego pueden ser los siguientes:

Cuadro 2 Ejemplo de un juego estático con información completa

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0,0	-1,1	1, -1
Papel	1, -1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1, -1	0,0

¿Cómo se podría representar el juego de un delantero y un portero en un partido de fútbol en un tiro de penalti?

Figura 1.1 Representación de un juego entre un delantero y un portero en un tiro de penalti.

		Portero	
		Izquierda	Derecha
Delantero	Izquierda	-1,1	1, -1
	Derecha	1, -1	-1,1

¿Cuántos jugadores incluye este juego? ¿Cuáles son las estrategias de cada jugador? ¿Cuál es la función de utilidad de cada jugador? Sea (x,y) la combinación de estrategias correspondientes, Jugador 1=x; Jugador 2=y. ¿Cuál es el conjunto de combinaciones de estrategias? ¿Cómo se describe un juego? ¿Cómo resolver el problema de Teoría de Juegos resultante? A continuación veremos la representación de los juegos en forma normal y podremos responder a las interrogantes anteriores.

1.3 Juegos en forma normal y Equilibrio de Nash

1.3.1 Representación de los juegos en forma normal

Cada jugador elige de forma simultánea una estrategia, y la combinación de estrategias elegidas por los jugadores determina la ganancia de cada jugador.

Para ejemplificar la representación de los juegos en forma normal, veamos el ejemplo clásico "el dilema del prisionero". Dos sospechosos son arrestados y acusados de un delito. La Policía no tiene evidencia suficiente como para condenar a los sospechosos, a menos que uno confiese. La Policía encierra a los sospechosos en celdas separadas y les explica las consecuencias derivadas de las decisiones que formen (cada sospechoso sabe que su sentencia dependerá de lo que confiesen tanto él como su compañero). Si ninguno confiesa, ambos serán condenados por un delito menor y sentenciados a un mes de cárcel. Si ambos confiesan, serán sentenciados a seis meses de cárcel. Finalmente, si uno confiesa y el otro no, el que confiesa será puesto en libertad inmediatamente y el otro será sentenciado a nueve meses en prisión, seis meses por el delito y tres meses más por obstrucción a la justicia. Supongamos que a cada prisionero no le interesa cuánto tiempo encierren a su compañero, sino sólo cuánto tiempo estará él en la cárcel.

El problema se puede representar mediante una matriz binaria (al hecho de que en un juego de dos jugadores hay dos números en cada casilla, las ganancias de los dos jugadores).

Figura 1.2: El Dilema del Prisionero

		Preso 2	
		No Confesar	Confesar
Preso 1	No Confesar	-1,-1	-9,0
	Confesar	0,-9	-6,-6

¿Cuáles son las estrategias en este juego? ¿Cuál es la función de utilidad de cada jugador?

En este juego cada jugador cuenta con dos estrategias posibles: confesar y no confesar. Las ganancias de los dos jugadores cuando eligen un par específico de estrategias aparecen en la casilla correspondiente de la matriz binaria. Por convención, la ganancia del llamado jugador-fila es la primera ganancia, seguida por la ganancia del jugador-columna. Por ejemplo, si el preso 1 elige no confesar y el preso 2 elige confesar, el preso 1 recibe una ganancia de -9 (que representa nueve meses de prisión) y el preso 2 recibe una ganancia de 0 (que representa la inmediata puesta en libertad).

¿Cuál será el resultado de esta situación? Cada prisionero puede determinar lo que más le conviene sin necesidad de saber lo que hará el otro prisionero (cada uno se preocupa sólo por el tiempo que puede estar en la cárcel y actuará racionalmente para aumentar su propio bienestar); es decir, el prisionero 1 debe elegir alguna de las estrategias sin importar que haga el prisionero 2.[4] ¿Qué es lo que más le conviene al prisionero 1?

Ejercicios.

Para los siguientes casos, establecer la matriz de pagos:

a. Considerar dos empresas que venden un mismo bien (Airbus y Boeing). Cada una puede elegir entre hacer descuentos en el precio a los clientes o no. Supongamos lo siguiente: Si nadie hace descuentos, los beneficios de ambas son 4. Si una empresa hace descuentos y la otra no, la primera le quita los clientes a la segunda y obtiene 7 de beneficio. La segunda, por lo contrario, obtiene un beneficio de 0. Finalmente, suponemos que si los dos hacen descuentos entonces los ingresos bajan, con lo cual los beneficios de ambas son sólo de 2.
b. Dos países comercian entre sí. Cada uno puede elegir una política comercial proteccionista ('no cooperar') o liberal ('cooperar'). Suponemos que si un país es proteccionista y el otro no, el primero sale ganando con respecto a la situación en que ambos eran liberales (y el segundo sale perdiendo).Si los dos países son proteccionistas, ambos están peor que si los dos fueran liberales.

4 Este ejemplo pone de manifiesto la existencia de situaciones en que la búsqueda del bienestar individual conduce a un resultado perjudicial para ambos jugadores. Por ejemplo, el bienestar de los dos prisioneros aumentaría si los dos negaran las acusaciones.

c. Dos grandes países que tienen que decidir si firman un protocolo para controlar las emisiones de $CO2$ (Protocolo de Kyoto). Suponer que si los dos países firman (o no firman), la competitividad de las empresas de cada país es idéntica. Sin embargo, si un país firma y el otro no, las industrias del primero pierden competitividad (porque tienen que gastar dinero para reducir las emisiones), mientras que las del segundo la ganan.

De manera general, la representación en forma normal de un juego[5] se especifica de la siguiente manera:

1. Los jugadores en el juego.
2. Las estrategias de que dispone cada jugador.
3. La ganancia (utilidad o bienestar) de cada jugador en cada combinación posible de estrategias.

Pueden haber n jugadores, $\{1,\ldots,n\}$, un jugador arbitrario es denominado jugador i. Sea S_i el conjunto de estrategias con que cuenta el jugador i (llamado espacio de estrategias de i), y sea s_i un elemento arbitrario de este conjunto ($s_i \in S_i$). Sea $(s_1,\ldots,s_n)$ una combinación de estrategias, una para cada jugador, y sea u_i la función de ganancias del jugador i: $u_i\ (s_1,\ldots,s_n)$ es la ganancia del jugador i si los jugadores eligen las estrategias $(s_1,\ldots,s_n)$.

5 Juegos en forma estratégica.

Definición 1.0:

La representación en forma normal de un juego con n jugadores especifica los espacios de estrategias de los jugadores $S1,\ldots,Sn$ y sus funciones de ganancias $u_1,\ldots,u_n$. Se denota el juego con $G=\{S_1,\ldots,S_n;u_1,\ldots,u_n\}$.

La elección de estrategias en forma simultánea implica que cada parte elija la acción a seguir sin conocer las decisiones de los demás (como sería el caso si los presos tomasen una decisión en momentos arbitrarios en sus celdas separadas).

Apliquemos la representación en forma normal del juego del dilema del prisionero.

La forma normal se puede representar de la siguiente forma:

i. El conjunto de jugadores N está formado por Prisionero 1 y Prisionero 2 $n = 2$ jugadores.
ii. El conjunto de estrategias es el mismo para los dos jugadores

    $S_i = S_2 =$ {Confesar, No Confesar}

    Denotamos (x,y) a la combinación de estrategias en el que el Jugador 1 elige la estrategia x y el Jugador 2 elige la estrategia y. Entonces el conjunto de combinaciones de estrategias es:

    S = {(Confesar, No Confesar), (Confesar, Confesar), (No Confesar, Confesar), (No Confesar, No Confesar)}

iii. La función de utilidad es el negativo del número de años que pasa en la cárcel cada jugador.

Por ejemplo, si el jugador 1 "confiesa" y el Jugador 2 "No Confesar", el Jugador 1 tiene utilidad de 0 (lo liberan), es decir:

La utilidad del Jugador 1

u_1 (Confesar, No Confesar) = 0

u_1 (No Confesar, No Confesar) = - 1

u_1 (Confesar, Confesar) = - 6

u_1 (No Confesar, Confesar) = - 9

La utilidad del Jugador 2

u_2 (Confesar, No Confesar) = 0

u_2 (No Confesar, No Confesar) = - 1

u_2 (Confesar, Confesar) = - 6

u_2 (No Confesar, Confesar) = - 9

1.4 Eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas

Cuando un jugador tiene una estrategia con la característica de que le proporciona mejores resultados que sus demás estrategias, no importando qué hagan los demás jugadores, dicha estrategia es identificada como una estrategia fuertemente dominante, y es esta estrategia la que le conviene utilizar.

Ahora que ya conocemos la forma de representar un juego, veamos la forma de resolver un problema de teoría de juegos. Podemos retomar el ejemplo del dilema del prisionero, ya que es fácil de resolverlo utilizando únicamente la idea de que un jugador racional no utilizará una estrategia estrictamente dominada.

En el dilema, si un prisionero va a confesar, sería mejor para el otro confesar y con ello ir a la cárcel seis meses, en lugar no confesar y pasar nueve meses en prisión. Del mismo modo, si un prisionero no confiesa, para el otro sería mejor confesar y con ello ser puesto en libertad inmediatamente en lugar de no confesar y permanecer en prisión durante un mes. Así, para el preso ***i***, la estrategia de no confesar está dominada por la de confesar.

Definición 2.0:

En el juego en forma normal G = $\{S_1,\ldots,S_n; u_1,\ldots,u_n\}$, sean s'_i y s''_i posibles estrategias del jugador i (s'_i y s''_i son elementos de S_i). La estrategia s'_i está estrictamente dominada por la estrategia s''_i si para cada combinación posible de las estrategias de los restantes jugadores, la ganancia de i por utilizar s'_i es estrictamente menor que la ganancia de ***i*** por utilizar s''_i:

$$u_i(s_1,\ldots,s_{i-1}, s'_i,s_{i+1},\ldots,s_n) < u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s''_i,s_{i+1},\ldots,s_n)$$

Para cada $(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$ que puede ser construida a partir de los espacios de estrategias de los otros jugadores $S_1,\ldots,S_{i-1}, S_{i+1},\ldots,S_n$.

Los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas, pues no es óptimo utilizarlas.[6] Así en el dilema del prisionero, un jugador racional elegirá confesar, por lo que (confesar, confesar) será el resultado al que llegan dos jugadores racionales, incluso cuando (confesar, confesar) supone unas ganancias peores para ambos jugadores que (no confesar, no confesar).

Considerar el juego abstracto siguiente:

Figura 1.3

		Jugador 2		
		Izquierda	Centro	Derecha
Jugador 1	Alta	1,0	1,2	0,1
	Baja	0,3	0,1	2,0

El Jugador 1 tiene dos estrategias y el Jugador 2 tiene tres: S_1={alta, baja} y S_2={izquierda, centro, derecha}. Para el Jugador 1, ni "alta" ni "baja" están estrictamente dominadas: "alta" es mejor que "baja" si el Jugador 2 elige "izquierda" (porque 1 es mayor que 0), pero "baja" es mejor que "alta" si el Jugador 2 elige "derecha" (porque 2 es mayor que 0).

Sin embargo, para el Jugador 2, "derecha" está estrictamente dominada por "centro" (porque 2 es mayor que 1, y 1 es mayor que 0), por lo que un Jugador racional 2 no elegirá "derecha". Así, si el Jugador 1 sabe que el Jugador 2 es racional, puede eliminar "derecha" del espacio de estrategias del Jugador 2. Esto es, si el Jugador 1 sabe que el Jugador 2 es racional, puede comportarse en el juego como si estuviera en el juego siguiente:

Figura 1.4

		Jugador 2	
		Izquierda	Centro
Jugador 1	Alta	1,0	1,2
	Baja	0,3	0,1

En la figura 1.4, "baja" está ahora estrictamente dominada por "alta" para el jugador 1, así que, si el jugador 1 es racional (y el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, por lo que se aplica el juego de la figura 1.4) no elegirá "baja". Por ello, si el jugador 2 sabe que el jugador 1 es racional, y el jugador 2 sabe que el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional (por lo que el jugador 2 sabe que se aplica la figura 1.4), el jugador 2 puede eliminar "baja" del espacio de estrategias del jugador 1, quedando el juego como lo indica la figura 1.5. Pero ahora, "izquierda" está estrictamente dominada por "centro" para el jugador 2, quedando (alta, centro) como el resultado del juego.

Figura 1.5

		Jugador 2	
		Izquierda	Centro
Jugador 1	Alta	1,0	1,2

Este proceso se denomina eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas (EIEED). Aunque está basado en la atractiva idea de que los jugadores racionales no utilizan

6 Porque dispone de una estrategia alternativa que le proporciona un bienestar mayor, no importando lo que hagan los demás jugadores.

estrategias estrictamente dominadas, el proceso presenta dos inconvenientes:

1. Cada paso requiere un supuesto adicional sobre lo que los jugadores saben acerca de la racionalidad del otro (información de dominio público).
2. El proceso conduce a menudo a una predicción imprecisa sobre el desarrollo del juego (puede darse el caso que no haya estrategias estrictamente dominadas para ser eliminadas—ejemplo figura 1.6).

Figura 1.6

	I	C	D
A	0,4	4,0	5,3
M	4,0	0,4	5,3
B	3,5	3,5	6,6

A continuación demostraremos un concepto de solución más efectivo que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas, denominado Equilibrio de Nash. Las estrategias de los jugadores en un Equilibrio de Nash siempre sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas.

1.5 Ejercicios y aplicaciones

1. Dos empresas únicas en cierto mercado de combustibles, pueden fijar dos niveles de precios que pueden denominarse alto y bajo. Cada una fija su precio sin conocer la decisión de su competidor. Si las dos empresas fijaran el mismo precio se repartirían el mercado a la mitad; por lo que si el precio común es alto obtendrían beneficios de 75, mientras que si es bajo, obtendrían 55. Si una empresa fijara el precio más bajo que su competencia, le quitaría una porción importante del mercado y la dejaría con beneficios de solo 45, mientras que ella aumentaría los suyos a 100. Hacer la matriz binaria del juego. ¿Cuál será el comportamiento de cada empresa, cuando cada una quiere maximizar sus propios beneficios? ¿Qué le conviene a cada empresario?
2. Dos empresarios con acceso al lago de Ilopango tiene flotas pesqueras respectivamente. Cada empresario debe decidir cuántas lanchas pesqueras envía al lago. La pesca que obtiene cada lancha depende del número total de lanchas en el lago, si los dos empresarios envían pocas lanchas, cada lancha obtendrá una buena pesca y cada empresario beneficios de 100; si los dos empresarios envían muchas lanchas, el lago se saturará de lanchas, y cada lancha pescará poco y cada empresario obtendrá beneficios de 50. Si un empresario envía muchas lanchas y el otro empresario envía pocas, el primero se beneficiará de la moderación del segundo, obtendrá beneficios de 120 y dejará al segundo con beneficios de 40. Hacer la matriz binaria del juego: ¿Cuál será el comportamiento de cada empresa, cuando cada una quiere maximizar sus propios beneficios? ¿Qué le conviene a cada empresario? ¿Cuál es la estrategia fuertemente dominante?

3. Considerar la siguiente forma normal del juego:

- N={1, 2}.
- A_i = {Cine, Teatro}. Cada jugador selecciona una acción que puede ser "ir al cine" o "ir al teatro".
- El Jugador 1 prefiere ver una película con el Jugador 2 que ir al teatro.
- El Jugador 2 prefiere ir al teatro con el Jugador 2 que ir a ver una película.
- Los jugadores obtienen un pago de 0 si ellos terminan en un lugar diferente que el otro jugador.

Jugador 1 / Jugador 2	**Película**	**Teatro**
Película	a,b	0,0
Teatro	0,0	c,d

¿Cuál restricción debería satisfacer a, b, c y d?

a) a>c, b>d

b) a>d, b<c

c) a>c, b<d

d) a<c, b<d

4. El problema de la Batalla del Mar de Bismarck.

Durante la Segunda Guerra Mundial (1943), tropas EE.UU. y japonesas se vieron envueltas en el siguiente juego: El almirante japonés Inamura iba a transportar tropas para reforzar su base en Nueva Guinea, y el General Kenney quería bombardear esas tropas durante el traslado. Kenney quería maximizar el tiempo de exposición al bombardeo e Inamura minimizarlo. Inamura podía realizar el traslado por el norte o por el sur de Nueva Bretaña, por lo que Kenney también debía decidir a cuál de esos sitios enviar sus aviones. El traslado duraría tres días por cualquiera de las rutas; pero la ruta norte era más lluviosa. Además, si Kenney no acertaba a la ruta que seguiría Inamura, sus aviones tendrían un poco menos de un día en rectificar el rumbo y alcanzar a las tropas japonesas. Estas consideraciones resultaban en un tiempo de exposición de tres días si el bombardeo tenía lugar en el sur y Kenney enviaba sus aviones por esa ruta desde el principio, con una reducción de 0.9 días si Kenney elegía una ruta distinta a Inamura y de un día si el bombardeo tenía lugar en el norte. La matriz de pagos era la siguiente:

		Inamura	
		Norte	Sur
Kenney	Norte	2, -2	2.1, -2.1
	Sur	1.1, -1.1	3, -3

- Determine si existe un equilibrio en estrategias fuertemente dominantes para Kenney e Inamura.
- ¿Qué ruta tomará Inamura y Kenney?

5. Ejercicio referido a una campaña publicitaria.

Dos empresas piensan lanzar un nuevo producto y están pensando cómo anunciarse. Cada empresa tiene la posibilidad de realizar diferentes tipos de campaña publicitaria y anunciarse por:

i. Radio. (baja).

ii. Por TV. (media).

iii. Por radio y TV. (alta).

La distribución del mercado entre las dos empresas se determinará por el tipo de campaña que lancen las dos. Esta distribución, junto con el costo de la campaña, determina las ganancias que obtiene cada empresa, y se presenta a continuación:

		Empresa 2		
		Baja	Media	Alta
Empresa 1	Baja	70, 70	65, 80	50, 90
	Media	80, 60	60, 65	40, 60
	Alta	60, 50	40, 40	20, 45

- ¿Existe una estrategia fuertemente dominante?
- Aplicar el proceso de EIEED. ¿Cuál es la estrategia que utilizaría la Empresa 1 y la empresa 2?

6. Ejercicio de Múltiplos de 1000 (El Dilema del Viajero).

   Dos jugadores eligen simultáneamente números múltiplos de mil, entre 7 mil y 10 mil, ambos incluidos. A cada jugador se le pagará el mínimo de los números elegidos. Adicionalmente, si estos números son distintos, el jugador que eligió el número mayor le pagará una transferencia de 7 mil al que eligió el número menor.

   El Dilema del Viajero (Basu, 1994) está basado en la siguiente historia:

   En el viaje de regreso de unas vacaciones, se perdieron los equipajes de dos viajeros que habían comprado exactamente los mismos objetos. La compañía aérea pone a los viajeros a participar en un juego como el anteriormente descrito, les dice: "Cada uno de ustedes debe solicitar un pago por el valor de los objetos extraviados, que sabemos que están entre 7 mil y 10 mil. Nosotros les vamos a pagar el mínimo de las dos solicitudes. Pero para asegurarnos de que no nos engañen, si las dos cantidades solicitadas son diferentes, vamos a quitarle 7 mil a la persona que hizo la reclamación más alta y dárselos a la que hizo la más baja". A continuación la representación del juego:

		Jugador 2			
		7 mil	8 mil	9 mil	10 mil
Jugador 1	7 mil	7, 7	14, 0	14, 0	14, 0
	8 mil	0, 14	8, 8	15, 1	15, 1
	9 mil	0, 14	1, 15	9, 9	16, 2
	10 mil	0, 14	1, 15	2, 16	10, 10

- ¿Qué estrategias sobreviven al proceso de EIEED?

7. Encontrar cuáles estrategias sobreviven al proceso de EIEED del siguiente juego.

		Empresa 2	
		Izquierda	Derecha
Empresa 1	Baja	4, 2	1, 4
	Media	2, 4	3, 1
	Alta	1, 3	4, 4

- ¿Cuál es la mejor combinación de estrategias?

II
El Equilibrio de Nash

¿La Teoría de Juegos ofrece una solución única a un determinado problema? Esta solución debe ser un Equilibrio de Nash.

Supongamos que la Teoría de Juegos hace una única predicción sobre las estrategias elegidas por los jugadores. Para que esta predicción sea correcta es necesario que cada jugador esté dispuesto a elegir la estrategia predicha por la teoría, la mejor respuesta de cada jugador a las estrategias predichas de los otros jugadores, tal predicción puede denominarse estratégicamente estable, ya que ningún jugador querrá desviarse de la estrategia predicha para él. Esta predicción es denominada Equilibrio de Nash.

Definición 3.0:

En el juego en forma normal de n jugadores, $G=\{S_1,..,S_n;\ u_1,..,u_n\}$, las estrategias $(s^*_1,\ldots,s^*_n)$ forman un Equilibrio de Nash (EN) si, para cada jugador i, s^*_i es la mejor respuesta del jugador i (o al menos una de ellas) a las estrategias de los otros n-1 jugadores, $(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1}, s^*_{i+1},\ldots,s^*_n)$:

$$u_i(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1}, s^*_i, s^*_{i+1},\ldots,s^*_n) \geq u_i(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1}, s_i, s^*_{i+1},\ldots,s^*_n)$$

Para cada posible estrategia s_i en S_i; esto es, s^*_i es una solución de

$$\max_{s_i \,\varepsilon\, S_i} u_i\,(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1},s_i,s^*_{i+1},\ldots,s^*_n)$$

Esta definición hace referencia a que una combinación de estrategias es un NE si ningún jugador dispone de una estrategia que le permita aumentar su utilidad desviándose unilateralmente. Una combinación de estrategias será un EN si cada jugador responde con la estrategia que más le conviene como respuesta a las estrategias de los demás jugadores.

Consideremos los tres juegos en forma normal ya descritos (el dilema del prisionero--Figura 1.2, Figura 1.3 y la Figura 1.6). La forma de encontrar los equilibrios (EN) es la siguiente: para cada jugador y para cada estrategia posible con la que cuenta cada jugador se determina la mejor respuesta del otro jugador a esa estrategia. La Figura 2.1 muestra este procedimiento, subrayando la ganancia de la mejor respuesta del jugador j a cada una de las posibles estrategias del jugador i. Si el jugador columna fuera a jugar la estrategia I, por ejemplo, la mejor respuesta del jugador fila sería M, puesto que 4 es mayor que 3 y que 0; por ello, la ganancia que 4 le proporciona al jugador fila en la casilla (M,I) de la matriz binaria esta subrayada.

Figura 2.1

		Jugador Columna		
		I	C	D
Jugador Fila	A	0, 4	4, 0	5, 3
	M	4, 0	0, 4	5, 3
	B	3, 5	3, 5	6, 6

Un par de estrategias satisface la condición EN si la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a la del otro, es decir, si ambas ganancias están subrayadas en la casilla correspondiente de la matriz binaria, razón por la cual la casilla (B,D) es el único par de estrategias que satisface EN.[7] En el caso del dilema del prisionero (Figura 1.2), lo mismo ocurre para (confesar, confesar), y en la Figura 1.3 ocurre para (alta, centro). Estos pares de estrategias son los únicos equilibrios de Nash de estos juegos.

¿Cuál es la relación entre el EN y la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas (EIEED)? Recordemos que las estrategias de Equilibrio de Nash de los tres ejemplos anteriores, son las únicas estrategias que sobreviven a la EIEED, entonces puede generalizarse que… si la EIEED elimina todas las estrategias menos las estratégicas ($s^*_1,\ldots,s^*_n$), estas estrategias constituyen el único EN del juego. Sin embargo, puesto que la EIEED con frecuencia no elimina más que una combinación de estrategias, es del máximo interés el hecho que el EN sea un concepto de solución más poderoso que la EIEED, pero pueden existir estrategias que sobrevivan a la EIEED pero que no formen parte de ningún EN.

¿Podemos estar seguros de que el Equilibrio de Nash existe? [8]

7 La casilla (B,D) corresponde a una combinación de estrategias (s^*_1, s^*_2) tal que, dado s^*_2, al jugador fila le conviene elegir s^*_1 y, recíprocamente, dado s^*_1, al jugador columna le conviene elegir s^*_2; es decir, tenemos un par de estrategias que son "mejor respuesta la una de la otra".

8 Nash demostró en 1950 que en cualquier juego finito (por ejemplo, un juego en el cual el número n de jugadores y los conjuntos de estrategias $S_1,\ldots,S_n$ son todos finitos) existe al menos un Equilibrio de Nash. Ademas, Cournot(1838) propuso la misma noción de equilibrio en el contexto de un modelo particular de duopolio y demostró que existe un equilibrio en este modelo.

Otro ejemplo clásico en la Teoría de Juegos es la batalla de los sexos. Este ejemplo muestra que un juego puede tener múltiples equilibrios de Nash: un hombre y una mujer están tratando de decidir qué harán esta noche. Juan y María deben elegir entre ir a la ópera o a un combate de boxeo. Ambos jugadores preferirían pasar la noche juntos, pero Juan preferiría estar junto en el boxeo, mientras que Maria preferiría estar junta en la ópera.

Figura 2.2 la batalla de los sexos

		Juan	
		Ópera	Boxeo
María	Ópera	2, 1	0, 0
	Boxeo	0, 0	1, 2

¿Cuáles son equilibrios de Nash?

Se ha argumentado que si la teoría de juegos ofrece una única solución a un juego, esta debe ser un EN; sin embargo, este argumento ignora la posibilidad de juegos en los cuales la teoría de juegos no ofrece una solución única. En algunos juegos con múltiples EN sobresale un equilibrio como la solución más atractiva del juego (se debe identificar este equilibrio en diferentes clases de juegos). El ejemplo de la batalla de los sexos indica que pueden existir juegos para los cuales la Teoría de Juegos no ofrece una solución única y en los que no se llegará a ningún acuerdo (hay mucha investigación al respecto).

¿Cuál es el equilibrio de Nash en "Piedra, papel, tijera"?

Figura 2.3 Juego piedra, papel tijera

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0,0	-1,1	1, -1
Papel	1, -1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1, -1	0,0

No siempre existe un equilibrio de Nash. Para resolver este problema, los teóricos inventaron el concepto de estrategias mixtas.

2.1 Ejercicios sobre equilibrios de Nash

Aplicar el concepto de Equilibrio de Nash a una competición electoral.

Considerar a dos candidatos, A y B, que compiten. El objeto de la campaña es hacer una propuesta para una inversión en un edificio público (por ejemplo una biblioteca, un Centro de Investigación, etc). Para este edificio se puede gastar entre 0 y 1.

Supongamos que hay un número finito de votantes, y cada votante tiene un nivel de inversión definido (preferido).

Cada votante vota por el candidato que propone un nivel de inversión más cerca de su nivel ideal. Por ejemplo, si el candidato A propone invertir $P_A = 0.3$ y el candidato B propone invertir $P_B = 0.8$, el votante cuyo nivel ideal es invertir 0.4 votará por el candidato A.

La distribución de los votantes según sus niveles ideales de inversión es uniforme entre 0 y 1. Además se supone que a los candidatos solo les interesa ganar. Las ganancias para los candidatos se resumen así:

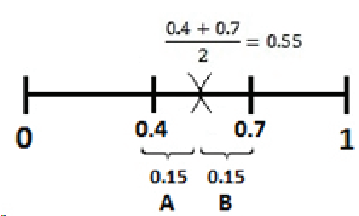
- El que gane tiene una utilidad de 1.
- El que pierde tiene una utilidad de -1.
- Si hay empate, los dos candidatos tienen una ganancia de 0.

¿Cuál es el Equilibrio de Nash de este juego?

Solución:

Por ejemplo, si A propone $P_A = 0.4$ y B propone $P_B = 0.7$ tenemos:

- Todos los votantes cuyos niveles ideales están entre 0 y 0.4 votan por A, por lo cual el candidato A ya tiene al menos el 40% de los votos.
- Todos los votantes cuyos los niveles ideales están entre 0.7 y 1.0 votan por B, por lo cual el candidato B tiene al menos el 30% de los votos.
- Todos los votantes cuyos niveles ideales están entre 0.4 y 0.55 votan por A, estos votantes representan el 15% de los votantes



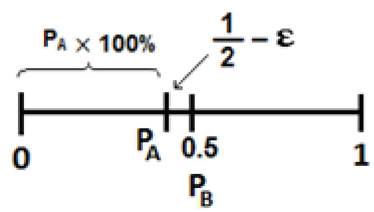
- Todos los votantes cuyos niveles ideales están entre 0.55 y 0.7 votan por B. Estos votantes representan el 15% de los votantes.
- Entonces:
  A tiene el 15% + 40% = 55% de los votos, y

B tiene el 15% + 30% = 45% de los votos.

El candidato A gana la elección y su ganancia es 1, y B pierde y su ganancia es –1.

Ahora supongamos que el candidato A propone un nivel de inversión menor a 0.5.

- Si el candidato A propone $P_A < \frac{1}{2}$ y supone que $P_B = \frac{1}{2}$

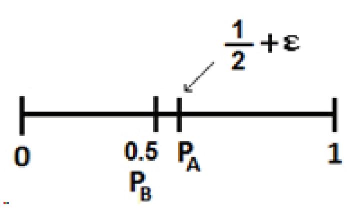


Los votantes entre 0 y P_A votan por el candidato A, es decir el (P_A x 100%) de los votantes, y también todos los votantes cuyos niveles de inversión ideales están entre P_A y P_B, y que están más cerca de P_A que de P_B; es decir el $\frac{P_B - P_A}{2} X\,100\%$ de los votantes; así el candidato A tiene ($P_A + \frac{1}{2}(P_B - P_A)$) x 100% de los votos. De forma más simple, el candidato A tiene el ($P_A + \frac{1}{2}(P_B - P_A)$) x 100% de los votos. Dado que $P_B = \frac{1}{2}$, y que $P_A < \frac{1}{2}$, tenemos que: ($P_A + \frac{1}{2}(P_B - P_A)$) x 100%<50%

El candidato A pierde, y tiene una ganancia igual a – 1

Por lo tanto, el candidato A no querrá establecer un nivel de inversión $P_A < \frac{1}{2}$

- Si A propone $P_A > \frac{1}{2}$ y supone que $P_B = \frac{1}{2}$.



Los votantes entre P_A y 1.0 votan por el candidato A, es decir el (1 – P_A) x 100% de los votantes y también todos los votantes cuyos niveles de inversión ideales están entre P_B y P_A y que están más cerca de P_A que de P_B, es decir el $\frac{P_A - P_B}{2} X\,100\%$ de los votantes.

Así, el candidato A tiene ($1 - P_A + \frac{1}{2}(P_A - P_B)$) x 100% de los votos.

De forma más simple, el candidato A tiene el ($1 - \frac{1}{2}(P_A + P_B)$) x 100% de los votos.
Dado que $P_B = \frac{1}{2}$, y que $P_A > \frac{1}{2}$ tenemos que ($1 - \frac{1}{2}(P_A + P_B)$) x 100% < 50%

El candidato A pierde, y tiene una ganancia de – 1.

Por lo tanto, el candidato A no querrá establecer un nivel de inversión[9] $P_A > \frac{1}{2}$ Así, el único Equilibrio de Nash de este juego es cuando $P_A = \frac{1}{2}$ y $P_B = \frac{1}{2}$. Con este perfil hay empate, por lo cual, los dos candidatos tienen una ganancia de 0.

2.2 Ejercicios y aplicaciones

Resolver los siguientes ejercicios aplicando EIEED y EN.

8. ¿Qué es un juego en forma normal?, ¿Qué es una estrategia estrictamente dominada en un juego en forma normal?, ¿Qué es

9 Se puede hacer el mismo análisis para el candidato B.

Equilibrio de Nash con Estrategias Puras (EP) en un juego en forma normal?

9. En el siguiente juego en forma normal, ¿Qué estrategia sobrevive a una EIEED?, ¿Cuáles son los Equilibrio de Nash con Estrategias Puras?

		J2		
		I	C	D
J1	A	2, 0	1, 1	4, 2
	M	3, 4	1, 2	2, 3
	B	1, 3	0, 2	3, 0

10. Sea G = { N, S, u } un juego en forma normal, donde N= {i, j} es el conjunto de jugadores. S1= {a, b, c} ; S2 = {d, e, f} los conjuntos de estrategia de los jugadores, y las funciones de ganancia se resumen a continuación.

	D	E	F
A	2, 3	4, 5	1, -1
B	1, 4	2, 3	1, 5
C	1, 0	0, 1	3, 3

Hallar los equilibrios de Nash en Estrategias Puras (EP).

11. Dos empresas de computadoras planean comercializar sistemas de red para la gestión de la información en la oficina. Cada una puede fabricar un sistema rápido y de alta calidad (H), o un lento y de baja calidad (L). El estudio de mercado indica que los beneficios resultantes para cada firma en función de la estrategia seleccionada vienen dadas por la siguiente matriz de pago.

		Empresa B	
		H	L
Empresa A	H	30, 30	50, 1
	L	40, 60	20, 20

¿Tiene algún jugador una estrategia dominante? ¿Cuál es el Equilibrio de Nash?

12. Sea G el juego siguiente:

	X	Y	Z
A	6, 6	8, 20	0, 8
B	10, 0	5, 5	2, 8
C	8, 0	20, 0	4, 4

Aplicar EIEED ¿Cuáles es el EN?

13. Considerar el juego siguiente:

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0, 0	-1, 1	1, -1
Papel	1, -1	0, 0	-1, 1
Tijera	-1, 1	1, -1	0, 0

¿Cuántos equilibrios en Estrategias Puras de Nash hay en este juego?

III
Estrategias mixtas

Recordar que hemos definido a S_i al conjunto de estrategias del jugador ***i***, y a la combinación de estrategias $(s^*_1,\ldots,s^*_n)$ como un Equilibrio de Nash (EN) si para cada jugador ***i***, s^*_i es la mejor respuesta del jugador ***i*** a las estrategias de los otros n-1 jugadores:

$$u_i(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1}, s^*_i, s^*_{i+1},\ldots,s^*_n) \geq u_i(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1}, s_i, s^*_{i+1},\ldots,s^*_n)$$

Para cada estrategia s_i en S_i .

Examinemos el siguiente juego conocido como "El juego de las monedas". ¿Este juego tiene un EN?

Figura 3.1

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	-1, 1	1, -1
	Cruz	1, -1	-1, 1

N = {Jugador 1, Jugador 2 }

$S_1 = S_2 =$ { Cara, Cruz }

Imaginar que cada jugador tiene una moneda y debe elegir mostrar una cara de la moneda. Si las dos monedas coinciden (ambas muestran la misma cara) el Jugador 2 gana la moneda del Jugador 1. Si las caras de las monedas no coinciden, entonces el Jugador 1 gana la moneda del Jugador 2. Puede comprobarse que no existe un EN.

Una característica de este juego es que a cada jugador le gustaría adivinar la jugada del otro y que el otro no adivinase la suya (idéntico al póquer, en las batallas,[10] el béisbol, etc).

Puede demostrarse que en cualquier juego, en el cual a cada jugador le convenga adivinar la jugada del otro y que el otro no adivine la suya, no existe ningún EN (tal como lo hemos definido); ya que la solución de tal juego incluye un elemento de incertidumbre sobre la actuación de los jugadores.

En estos casos aplica utilizar un nuevo concepto denominado Estrategia mixta (EM) (Harsany, 1973).

Hasta ahora hemos visto juegos estáticos con información completa, donde el plan se reduce a elegir una y solo una de las acciones disponibles (estrategias). Por ejemplo, en el juego de las monedas la única estrategia de cada jugador son jugar cara y jugar cruz. A tales estrategias las hemos denominado estrategias puras. La ampliación del concepto de estrategias consiste en permitir que los jugadores no solo puedan elegir entre acciones ciertas y concretas, sino que también puedan seleccionar acciones aleatorias

10 En una batalla podemos suponer que los atacantes pueden elegir entre dos objetivos o rutas (tierra o por mar) y la defensa puede rechazar cualquiera de los dos ataques sí y solo si éste es previsto de forma correcta.

(acciones mixtas, que asignan distintas probabilidades a las distintas acciones), estas son las estrategias mixtas.

Por ejemplo, dado el siguiente juego con estrategias puras S_1 y S_2.

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	3, 2	1, 4
	C	1, 3	2, 1
	B	2, 2	2, 0

$\left.\begin{array}{l} S_1 = \{ A, B, C \} \\ S_2 = \{ I, D \} \end{array}\right\}$ Estrategias Puras

Una estrategia mixta para J_1 es una distribución de probabilidad (p, q, 1– p – q) donde:

p $\longrightarrow$ probabilidad de elegir A

q $\longrightarrow$ probabilidad de elegir C

1– p – q $\longrightarrow$ probabilidad de elegir B

Una estrategia mixta para J_2 consistirá en una distribución de probabilidad (r, 1– r) donde:

r $\longrightarrow$ probabilidad de elegir I

1– r $\longrightarrow$ probabilidad de elegir D

Por ejemplo para el J_1 una estrategia mixta es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, que asigna $\frac{1}{2}$ a A, una probabilidad de $\frac{1}{4}$ a C, y una probabilidad de $\frac{1}{4}$ a B.

También podemos expresar las estrategias puras A,C,B (del J_1) como las estrategias mixtas (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) respectivamente.

¿Cuál es el efecto inmediato de utilizar estrategias mixtas? La función de pagos de cualquier jugador deja de ser determinista, pasando a ser aleatoria.

Una estrategia mixta para el jugador ***i*** es una distribución de probabilidad sobre algunas (o todas) las estrategias en S_i (estrategias puras del jugador *i*).

Las estrategias puras de un jugador son las diferentes decisiones que el jugador puede tomar. Así, en el juego de las monedas, S_i consiste en las dos estrategias puras “Cara” y “Cruz”, entonces una estrategia mixta para el Jugador ***i*** es la distribución de probabilidad ***(q, 1– q)***, donde ***q*** es la probabilidad de elegir “Cara” y ***1–q*** es la probabilidad de elegir “Cruz” (recordar que, por el concepto de probabilidad, $0 \leq q \leq 1$).

La estrategia mixta (0, 1) es la estrategia pura “Cruz”

La estrategia mixta (1, 0) es la estrategia pura “Cara”

En el siguiente juego podríamos utilizar diferentes estrategias mixtas:

Figura 3.2

		J2		
		Izquierda	Centro	Derecha
J1	Arriba	1, 0	1, 2	0, 1
	Abajo	0, 3	0, 1	2, 0

$S_2 = \underbrace{\{\text{izquierda, Centro, Derecha}\}}_{\text{Estrategias Puras}}$

Para el J_2 una estrategia mixta es distribución de probabilidad (q, r, 1 – q – r)

q $\longrightarrow$ probabilidad de elegir izquierda;

$$0 \leq q \leq 1$$

r $\longrightarrow$ probabilidad de elegir centro;

$$0 \leq r \leq 1$$

1– q – r $\longrightarrow$ probabilidad de elegir derecha;

$$0 \leq q + r \leq 1$$

Otras estrategias mixtas validas pueden ser

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Definición 4.0:

En el juego en forma normal $G = \{S_1,\ldots,S_n; u_1,\ldots,u_n\}$ supongamos que el jugador *i* cuenta con *k* estrategias puras $Si = \{s_{i1},\ldots,s_{ik}\}$. En este caso para el jugador *i* una estrategia mixta es una distribución de probabilidad $Pi = (P_{i1},\ldots,P_{ik})$ donde $0 \leq P_{ik} \leq 1$, para $k = 1,..,k$ y $P_{i1} + \ldots + P_{ik} = 1$

Observar el siguiente juego:

Figura 3.3

		J 2	
		I	D
J 1	A	3,	0,
	M	0,	3,
	B	1,	1,

$S_1 = \{ A, M, C \}$ $S_2 = \{ I, D \}$

¿Existen estrategias estrictamente dominadas?

Este juego demuestra que una estrategia pura **puede estar estrictamente dominada por una estrategia mixta**, aun si la estrategia pura no está dominada por ninguna otra estrategia pura.

Cualquier distribución de probabilidad (q,1–q), que el J_1 pudiera adoptar, la mejor respuesta del J_1 es A (si $q \geq \frac{1}{2}$) ó M (si $q \leq \frac{1}{2}$), pero nunca B. Ahora B está estrictamente dominada por una estrategia mixta. ¿Por qué?, por que obtiene una mayor ganancia esperada (utilidad esperada) al utilizar A (con una probabilidad de $\frac{1}{2}$) y al utilizar M (una probabilidad de $\frac{1}{2}$), respecto a utilizar a B.

Para obtener la utilidad esperada se encuentra la esperanza matemática de la ganancia de los jugadores.

Hemos supuesto que J_1 utiliza la estrategia mixta siguiente:

Jugar A con una probabilidad de $\frac{1}{2}$.

Jugar M con una probabilidad de $\frac{1}{2}$; mientras el J2 utiliza "I".

Entonces J_1 gana:

3 con una probabilidad $\frac{1}{2}$ (con la combinación S1 = (A,I)).

0 con una probabilidad $\frac{1}{2}$ (con la combinación S2 = (M,I)).

Entonces, la ganancia esperada del J_1 es:

$$E(u_1) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Así, si el J_1 elige A y M (ambas estrategias mixtas), la ganancia esperada de J_1 es $\frac{3}{2}$ independientemente de cuál estrategia (Pura o Mixta) utilice J_2, de manera que $\frac{3}{2}$ es mayor que el pago de 1 que produce con certeza la elección de B.

Supongamos que la ganancia del J_1 en la estrategia (B, I) se cambia a 2.

Figura 3.4

		J 2	
		I	D
J 1	A	3,	0,
	M	0,	3,
	B	2,	2,

Este juego muestra que una estrategia pura dada puede ser una mejor respuesta a una estrategia mixta, incluso si la estrategia pura no es una mejor respuesta a ninguna otra estrategia pura.

En este juego B no es una mejor respuesta para el J_1 (ante I o D del J_2), pero B es la mejor respuesta del J_1 a la estrategia mixta definida (q, 1– q).

Una observación importante es que una estrategia pura es también una estrategia mixta. Por ejemplo, si un jugador dispone de dos estrategias A y B, jugar la estrategia A es, por definición, jugar una estrategia pura; sin embargo, se puede ver como una estrategia mixta:

- Jugar la estrategia A con probabilidad de 1.
- Jugar la estrategia B con probabilidad de 0.

Ejemplo: Dado el siguiente juego, encontrar la utilidad esperada, suponiendo que el jugador 1 utiliza la estrategia mixta siguiente:

- Jugar A con una probabilidad de $\frac{1}{3}$.
- Jugar B con una probabilidad de $\frac{2}{3}$.

Mientras el J_2:

- Jugar C con una probabilidad de $\frac{1}{4}$.
- Jugar D con una probabilidad de $\frac{3}{4}$.

Figura 3.5

		J 2	
		C	D
J 1	A	4, 1	-1, 1
	B	2, -4	-2, 1

Si el J_2 utiliza la estrategia C

$\Longrightarrow$ J_1 gana:

4 con una probabilidad de $\frac{1}{4}$ (con el perfil (A, C).

2 con una probabilidad de $\frac{1}{4}$ (con el perfil (B, C).

y el J_2 gana:

1 con una probabilidad de $\frac{1}{3}$ (con el perfil (A, C).

-4 con una probabilidad de $\frac{2}{3}$ (con el perfil (B, C).

Así ambos jugadores jugaran:

La combinación (A, C) con una probabilidad de

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

La combinación (B, C) con una probabilidad de

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$

La combinación (A, D) con una probabilidad de

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$$

La combinación (B, D) con una probabilidad de

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$$

Entonces, las ganancias esperadas de los jugadores serán:

$$E\,(u_1) = \frac{1}{12}\,u_1(A, C) + \frac{2}{12}\,u_1(B, C) + \frac{3}{12}\,u_1(A, D) + \frac{6}{12}\,u_1(B, D)$$

$$= \frac{1}{12}(4) + \frac{2}{12}(2) + \frac{3}{12}(-1) + \frac{6}{12}(-2) = \frac{-7}{12}$$

$$E\,(u_2) = \frac{1}{12}\,u_2(A, C) + \frac{2}{12}\,u_2(B, C) + \frac{3}{12}\,u_2(A, D) + \frac{6}{12}\,u_2(B, D)$$

$$= \frac{1}{12}(1) + \frac{2}{12}(-4) + \frac{3}{12}(1) + \frac{6}{12}(1) = \frac{1}{6}$$

Ejercicio: Encontrar las utilidades esperadas del siguiente juego:

$$(p, 1-p) = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) \;\; ; (q, 1-q) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

		J 2	
		C	D
J 1	A	4, -5	4, 8
	B	1, 4	0, 1

3.1 Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas

Recordar que el Equilibrio de Nash visto hasta ahora, garantiza que la estrategia pura de cada jugador constituye una mejor respuesta a las estrategias puras de los demás jugadores. Esta definición se puede ampliar a las estrategias mixtas, de manera que, las estrategias mixtas de cada jugador sean una mejor respuesta a las estrategias mixtas de los otros jugadores.

La forma de encontrar la mejor respuesta del jugador *i* a una estrategia mixta del jugador *j* se basa en interpretación de la estrategia mixta del jugador *j* como representación de la incertidumbre del jugador *i* sobre lo que hará el jugador *j*.

En el ejemplo del “Juego de las monedas” (Figura 3.1), supongamos que el J_1 cree que el J_2 elegirá “cara” con probabilidad *q* y “cruz” con probabilidad *1 - q*; esto es J_1 supone que J_2 elegirá la estrategia mixta *(q, 1 - q)*.

En este supuesto, las ganancias esperadas del J1, eligiendo “cara” son:

$$q\ x\ (-1) + (1 - q)\ x\ (1) = -q + 1 - q = 1 - 2q$$

Mientras que, eligiendo “cruz” será:

$$q\ x\ (1) + (1 - q)\ x\ (-1) = q - 1 + q = 2q - 1$$

Dado que, 1- 2q > 2q - 1 (si y solo si $q < \frac{1}{2}$), la mejor respuesta en estrategias puras del J_1 es “Cara” si $q < \frac{1}{2}$, y “Cruz” si $q > \frac{1}{2}$.

El J_1 será indiferente entre “Cara” y “Cruz” si $q = \frac{1}{2}$.

Consideremos ahora las estrategias mixtas del J_1, sea (*r, 1 - r*) la estrategia mixta en la cual el J_1 elige “Cara” con probabilidad *r*. Para cada valor de q entre 0 y 1, calculamos el(los) valor(es) de r, denotados por *r*(q)* tal que *(r, 1 - r)* sea una mejor respuesta del J_1 a *(q, 1 - q)* del J_2.

La ganancia esperada del J_1 al elegir *(r, 1 - r)* cuando el J_2 elija *(q, 1 - q)* es:

		J 2	
		(q) Cara	*(1-q)* Cruz
J 1	*(r)* Cara	-1, 1	1, -1
	(1-r) Cruz	1, -1	-1, 1

$$rq(-1)+r(1-q)(1)+(1-r)(q)(1)+(1-r)(1-q)(-1)$$

$$=(2q-1)+r(2-4q)$$

Donde:

rq es la probabilidad de (cara, cara)

r (1-q) es la probabilidad de (cara, cruz)

(1-r)(q) es la probabilidad de (cruz, cara)

(1-r)(1-q) es la probabilidad de (cruz, cruz)

La ganancia esperada de J_1 crece en r si $2-4q> 0$ $(q< \frac{1}{2})$ y es decreciente en r si $2-4q < 0 (q>\frac{1}{2})$; así, la mejor respuesta de J_1 es $r = 1$ (cara) si $q < \frac{1}{2}$ y $r = 0$ (cruz) si $q>\frac{1}{2}$.

La naturaleza de la mejor respuesta del J_1 a (q, 1-q) cambia cuando q=$\frac{1}{2}$ (el $\frac{1}{2}$ es indiferente entre las estrategias puras cara y cruz).

La ganancia esperada de J_1 es independiente de r cuando q= $\frac{1}{2}$, el $\frac{1}{2}$ es también indiferente entre todas las estrategias mixtas *(r, 1-r)*; es decir, cuando q=$\frac{1}{2}$ la estrategia mixta *(r, 1-r)* es la mejor respuesta a *(q,1-q)* para cualquier valor de r entre 0 y 1 (Esto se puede graficar en un plano *p-q*).

Definición 5:

En el juego en forma normal de dos jugadores $G=\{S_1,S_2 \ ; \ u_1,u_2\}$, las estrategias mixtas $(p^*_1, \ p^*_2)$ forman un Equilibrio de Nash si la estrategia mixta de cada jugador es una mejor respuesta a la estrategia mixta del otro jugador, se deberá cumplir:

$V_1 \ (p^*_1, \ p^*_2) \geq V_1 \ (p_1, \ p^*_2)$ para cada distribución de probabilidad de p_1 sobre S_1.

p^*2 debe cumplir:

$V_2 \ (p^*_1, \ p^*_2) \geq V_2 \ (p^*_1, \ p_2)$ para cada distribución probabilidad de p_2 sobre S_2.

Ejercicio: considerando el juego “La batalla de los sexos” encontrar un EN en EM.

Solución:

La idea consiste en dotar el jugador *j* de una cierta información privada de manera que, dependiendo de cómo el jugador *j* entienda dicha información, se incline por una de las estrategias puras posibles. Sin embargo, puesto que el jugador *i* no dispone de la información privada de *j*, *i* continúa con la incertidumbre de no saber cuál será la decisión de *j*, y representamos dicha incertidumbre de *i* como una estrategia mixta de *j*.

Considerar la “Batalla de sexos” para encontrar EN con estrategias mixtas.

		Juan	
		(q) Ópera	*(1-q)* Boxeo
María	*(r)* Ópera	2, 1	0, 0
	(1-r) Boxeo	0, 0	1, 2

Sea *(q,1-q)* la estrategia mixta en la cual Juan elige "Ópera" con probabilidad ***q***, y sea *(r,1-r)* la estrategia mixta en la cual María elige "Ópera" con probabilidad ***r***.

Si Juan elige *(q,1-q)*, las ganancias esperadas de María son:

$$qx(2) + (1\text{-}q)x(0) = 2q \quad \text{al elegir "Ópera"}$$

y

$$qx(0) + (1\text{-}q)x(1) = 1\text{-}q \quad \text{al elegir "Boxeo"}$$

María utiliza una estrategia mixta (entre opera y boxeo) si está indiferente entre la estrategia ópera y boxeo de Juan, es decir, si su ganancia esperada cuando juega ópera es la misma que su ganancia esperada cuando juega boxeo, así se igualan las dos ecuaciones anteriores:

$$2q = 1 \text{-} q \longrightarrow q = \frac{1}{3}.$$

Así,

si $q > \frac{1}{3}$ la mejor respuesta de María es Ópera ($r = 1$)

si $q < \frac{1}{3}$ la mejor respuesta de María es Boxeo ($r = 0$), y

si $q = \frac{1}{3}$ cualquier valor de ***r*** es una mejor respuesta.

De modo similar, si María elige *(r,1-r)*, las ganancias esperadas de Juan son:

$r(1) + (1\text{-}r)\,(0) = r$ al elegir "Ópera" , y

$r(0) + (1\text{-}r)\,(2) = 2 \text{-}2r$ al elegir "Boxeo"

Igualando las ecuaciones, $r = 2\text{-}2r \longrightarrow r = \frac{2}{3}$. Así,

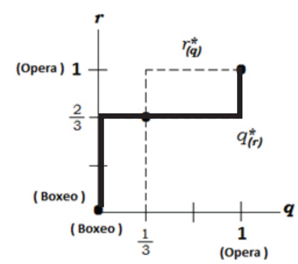
si $r > \frac{2}{3}$ la mejor respuesta de Juan es Ópera ($q = 1$)

si $r < \frac{2}{3}$ la mejor respuesta de Juan es Boxeo ($q = 0$)

y si $r = \frac{2}{3}$ cualquier valor de q es una mejor respuesta.

Así, las estrategias mixtas (q,1-q)=$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ de Juan y (r, 1-r) = $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ de María, forman un equilibrio de Nash.

Estos resultados pueden graficarse así:



Existen 3 intersecciones de $r^*_{(q)}$ *y* $q^*_{(r)}$*;*

$(q = 0,\ r = 0)$, $(q = 1,\ r = 1)$ *y* $(q = \frac{1}{3},\ r = \frac{2}{3})$.

Los primeros representan los Equilibrios Nash en Estrategias Puras (Boxeo, Boxeo) y (Ópera, Ópera), y el ultimo es el equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas.

En cualquier juego, un EN (que incluya estrategias puras o mixtas) aparece como una intersección de las correspondencias de mejor respuesta de los jugadores.

3.2 Cálculos de los de los EN en EM en los juegos 2x2

Se complica encontrar EN cuando tenemos juegos con más de dos jugadores o más de dos estrategias por jugador. A continuación se sistematiza el procedimiento para el cálculo de EN en EM en juegos 2x2 con 2 estrategias.

Una EM será respuesta óptima a otra estrategia dada (pura o mixta) solo si sus estrategia puras soporte son repuesta óptima. Esto significa que tales estrategias puras producen ganancias iguales y máximas, dadas la estrategia del otro jugador (Se hace apoyándose en una representación gráfica).

Pasos:

1. Se fijan EM genéricas para los jugadores. Sean *(p,1-p)* y *(q,1-q)* EM genéricas para los jugadores 1 y 2 respectivamente.
2. Para J_1 se calcula la utilidad esperada u_1 que se obtiene de cada una de sus estrategias puras cuando la estrategia del J_2 es *(q,1-q)*.
3. A partir del punto 2 se calcula la correspondencia de respuesta optima del J_1, $R_1(q)$.
4. Para el J_2 se calcula u_2 que se obtiene de cada una de sus estrategias puras cuando la estrategia de J_1 es *(p,1-p)*.
5. A partir del punto 4 se calcula la correspondencia de respuesta optima del J_2, $R_2(p)$.
6. En el plano *p-q* se representan gráficamente los correspondientes $R_1(q)$ y $R_2(p)$, obteniéndose los EN en EM en los puntos en donde se cortan.

A continuación se aplica el procedimiento al juego de las monedas.

El juego de las monedas

		J2	
		(q) Cara	*(1-q)* Cruz
J1	*(p)* Cara	1, -1	-1, 1
	(1-p) Cruz	-1, 1	1, -1

1) Dados *(p,1-p)* y *(q,1-q)* EM genéricas para J_1 y J_2, respectivamente.

2) Fijada la EM *(q,1-q)* del J_2, para el J_1 calcular:

u_1 *(cara, (q, 1-q)) = q(1) + (1-q) (-1) = 2q-1*

u_1 *(cruz, (q, 1-q)) = q (-1) + (1-q) (1) = 1-2q.*

3) Encontrar la correspondencia de respuesta óptima $R_1(q)$

$u_1(cara, (q, 1-q)) > u_1(cruz, (q, 1-q))$

$$\Leftrightarrow 2q-1 > 1-2q \Leftrightarrow q > \tfrac{1}{2}.$$

$u_1(cara, (q, 1-q)) < u_1(cruz, (q, 1-q))$

$$\Leftrightarrow 2q-1 < 1-2q \Leftrightarrow q < \tfrac{1}{2}.$$

$u_1(cara, (q, 1-q)) = u_1(cruz, (q, 1-q))$

$$\Leftrightarrow 2q-1 = 1-2q \Leftrightarrow q = \tfrac{1}{2}.$$

Por tanto la respuesta optima es:

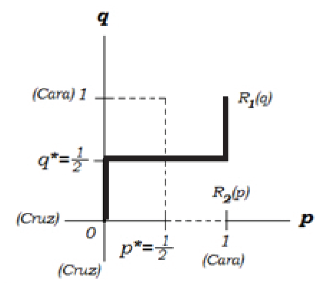
Cara, si q > $\frac{1}{2}$,

$\Rightarrow$Cruz si q < $\frac{1}{2}$

Cualquiera si q = $\frac{1}{2}$.

$$R_1(q) \begin{cases} P = 0 \text{ (cruz) si } q < \frac{1}{2}. \\ P = 1 \text{ (cara) si } q > \frac{1}{2}. \\ P \in [0,1] \text{ (cualquier estrategia) si } q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Gráficamente la correspondencia de respuesta óptima del J_1 a cualquier EM del J_2.



4) Fijada la EM *(p,1-p)* del J_1, para el J_2 calcular:

u_2 ((p, 1-p), (cara)) = p(-1) + (1 -p) (1) = 1-2p

u_2 ((p, 1-p), (cruz)) = p (1) + (1-p) (-1)) = 2p-1

5) Encontrar la correspondencia de respuesta óptima $R_2(p)$

u_2 ((p, 1-p), cara) > u_2 ((p, 1-p), cruz)

$$\Leftrightarrow 1\text{-}2p > 2p\text{-}1 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}.$$

u_2 ((p, 1-p), cara) < u_2 ((p, 1-p), cruz)

$$\Leftrightarrow 1\text{-}2p < 2p\text{-}1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}.$$

u_2 ((p, 1-p), cara) = u_2 ((p, 1-p), cruz)

$$\Leftrightarrow 1\text{-}2p = 2p\text{-}1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Por tanto la respuesta optima es:

Cara, si p < $\frac{1}{2}$,

$\Rightarrow$Cruz si p > $\frac{1}{2}$

Cualquiera si p = $\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow R_2(p) \begin{cases} q = 1 \text{ (cruz) si } p < \frac{1}{2}. \\ q = 0 \text{ (cara) si } p > \frac{1}{2}. \\ q \in [0,1] \text{ (cualquier estrategia) si } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se puede visualizar gráficamente la correspondencia de respuesta óptima del J_2 a cualquier EM del J_1 (ver $R_1(q)$ y $R_2(p)$ en la gráfica)

6) Los EN en EM se obtienen en los puntos en los que ambos puntos se cortan. Tomando en cuenta que el J_2 es indiferente entre sus estrategias puras y mixtas (le generan las mismas utilidades esperadas) cuando el J_1 juega su EM $(p, 1-p) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

El J_1 es indiferente entre sus EP y EM cuando el J_2 juega su EM $(q,1-q)=\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Podemos decir que el EN en EM es aquel en el que cada jugador juega dicha EM, que corresponde al punto en que se cortan las correspondencias de respuesta óptima.

Por tanto, $S^{NE} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

Este es el EN en EM del juego, ya que ningún jugador tiene incentivo a desviarse unilateralmente.

Ejercicio. Encontrar los EN del problema de la Batalla de los sexos.

Solución:

		J2	
		(q) Cine	*(1-q)* Fútbol
J1	*(p)* Cine	1, 2	0, 0
	(1-p) Fútbol	0, 0	2, 1

El juego tiene 2 EN en EP
(cine, cine), (fútbol, fútbol).

Sea $(q, 1\text{-}q)$ una EM de J_2, la utilidad que J_1 obtiene con cada una de sus estrategias puras es:

$$u_1\,(cine, (q, 1\text{-}q)) = q(1) + (1\text{-}q)\,(0) = q$$

$$u_1\,(fútbol, (q, 1\text{-}q)) = q(0) + (1\text{-}q)\,(2) = 2\text{-}2q$$

Se produce una igualdad

$$q = 2 \text{-}2q \;\; si\ y\ solo\ si \;\; q = \frac{2}{3}$$

Cuando $q = \frac{2}{3}$ el J_1 obtiene la misma ganancia de sus dos EP y por tanto de cualquiera de sus EM.

$\Rightarrow R_1(q)$ la correspondencia de respuesta optima del J_1 es:

$$R_1(q) \begin{cases} p = 1\ (cine)\ si\ q > \frac{2}{3}. \\ p = 0\ (fútbol)\ si\ q < \frac{2}{3}. \\ p \in [0,1]\ \forall\ E_i\ si\ q = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Sea (p, 1 -p) una EM del J_1.

$\Rightarrow$ La utilidad que J_2 obtiene con cada uno de sus EP es:

$$u_2\,((p, 1\text{-}p), cine) = p(2) + (1\text{-}p)\,(0) = 2p$$

$$u_2\,((p, 1\text{-}p), fútbol) = p(0) + (1\text{-}p)\,(1) = 1\text{-}p$$

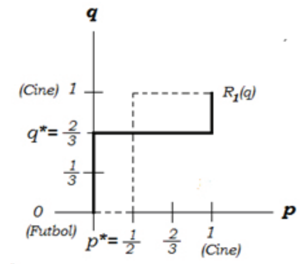
Igualando las ecuaciones, se tiene: $2p = 1\text{-}p$ si y solo si $P = \frac{1}{3}$

Cuando $P = \frac{1}{3}$ el J_2 obtiene la misma ganancia de sus dos EP, y por tanto de cualquiera de sus EM.

$\Rightarrow$ Cualquier EM o EP es respuesta optima del J_2 a (p, 1– p) = $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ del J_1

$$\Rightarrow R_2(p) \begin{cases} q = 1\ (cine)\ si\ p > \frac{1}{3}. \\ q = 0\ (fútbol)\ si\ p < \frac{1}{3}. \\ q \in [0,1]\ \forall\ E_i\ si\ p = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

El EN es la intersección de la correspondencia de respuesta óptima.



Así, el conjunto de perfiles de E_i que forman un EN es:

S^{NE} = $\{(cine, cine),(fútbol, fútbol), [(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}),(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})]\}$

3.3 Ejercicios y aplicaciones

1. Considerar el siguiente juego.

		Jugador 2		
		L	M	R
Jugador 1	U	8, 1	0, 2	4, 0
	C	3, 3	1, 2	0, 0
	D	5, 0	2, 3	8, 1

Supongan que el J_2 cree que el J_1 seleccionara U con probabilidad $\frac{1}{2}$, C con probabilidad $\frac{1}{4}$, y D con probabilidad $\frac{1}{4}$ también suponer que el J_2 planea seleccionar aleatoriamente M y R cada una con probabilidad $\frac{1}{2}$.

¿Cuál es el pago esperado del J_2?

2. Evaluar los siguientes pagos para el juego dado en forma normal de la siguiente matriz de pagos [recordar que una EM para el J_1 es $\sigma_1 \in \Delta$ {U, M, D} donde $\sigma_1(U)$ es la probabilidad que el J_1 juegue la estrategia U, $\sigma_1(M)$ es la probabilidad que el J_1 juegue la estrategia M y $\sigma_1(D)$ es la probabilidad que el J_1 juegue la estrategia D. Por simplicidad, podemos escribir σ_1 como $(\sigma_1(U),\sigma_1(M),\sigma_1(D))$ y en forma similar para el J_2]

1 \ 2	L	C	R
U	10, 0	0, 10	3, 3
D	2, 10	10, 2	6, 4
C	3, 3	4, 6	6, 6

a) u_1 (U , C)

b) u_2 (D , R)

c) u_2 (D , C)

d) u_1 (σ_1 ,C) para $\sigma_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

e) u_1 (σ_1 , R) para $\sigma_1 = (\frac{1}{4},\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

f) u_1 (σ_1 , L) para $\sigma_1 = (0,1,0)$

g) u_2 (σ_1 ,R) para $\sigma_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

h) u_2 (σ_1 , σ_2) para $\sigma_1 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}, 0)$; $= (\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

3. Para cada juego encontrar $u_1(\sigma_1 , \sigma_2)$ y $u_2(\sigma_1 , \sigma_2)$ para $\sigma_1 =(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y $\sigma_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

1 \ 2	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

1 \ 2	C	D
C	2, 2	0, 3
D	3, 0	1, 1

1 \ 2	O	M
O	2, 1	0, 0
M	0, 0	1, 2

4. En el siguiente juego en forma normal, ¿Cuál es el EN en EM?

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	2, 0	1, 1	4, 2
	M	3, 4	1, 2	2, 3
	B	1, 3	0, 2	3, 0

5. ¿Qué es un NE con EM en un juego en forma normal? ¿Qué es un EM en un juego en forma normal?

6. Demostrar que no existe EN con EM en los siguientes juegos:

		Prisionero 2	
		NC	C
Prisionero 1	NC	1, -1	-9, 0
	C	0, -9	-6, -6

		Jugador 2		
		L	M	R
Jugador 1	U	1, 0	1, 2	0, 1
	D	0, 3	0, 1	2, 0

		Jugador 2		
		L	C	R
Jugador 1	T	0, 4	4, 0	5, 3
	M	4, 0	0, 4	5, 3
	B	3, 5	3, 5	6,6

7. Suponer que tenemos un juego donde S_1={H,L} y S_2={x,y}. Si el J_1 juega H, entonces su pago es "z" sin tomar en cuenta la selección de la estrategia del J_2; los otros pagos del J_1 son u_1(L,X) = 0 y u_1 = (L,Y) = 10. Tú puedes escoger cualquier pago que tu gustes para el J_2 porque nosotros solamente estaremos preocupados con los pagos del J_1.

a. Hacer la matriz de pago del juego.

b. Si el jugador 1 cree $\theta_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. ¿Cuál es el pago esperado del J_1 de jugar H? ¿Cuál es su pago esperado de jugar H?, ¿Cuál es su pago esperado de jugar L? ¿Para cual valor de "z" es el J_1 indiferente entre jugar H y L?

c. Suponga$\theta_2=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Encontrar el pago esperado de jugar L.

8. Evaluar los siguientes pagos para el siguiente juego:

a. u_1 (σ_1 , I) para $\sigma_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

b. u_2 (σ_1 , O) para $\sigma_1 = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4},\frac{3}{8})$

c. u_1 (σ_1 ,σ_2) para $\sigma_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $\sigma_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

d. u_1 (σ_1 ,σ_2) para σ_1 = (O,$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$), $\sigma_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

1 \ 2	I	O
OA	2, 2	2, 2
OB	2, 2	2, 2
IA	4, 2	1, 3
IB	3, 4	1, 3

9. En el juego siguiente:

	L	R
T	7, 7	8, 0
B	0, 8	9, 9

a. Buscar equilibrio en EP.

b. Existe otro equilibrio en EM, en el cual los dos jugadores utilizan sus dos estrategias puras con una probabilidad estrictamente positiva. Encontrar este equilibrio y explicar que no hay otro equilibrio en el que un jugador utiliza una EM (que no es pura) y el otro utiliza una EP.

c. Dibujar la función de mejor respuesta.

10. Sea G={N, S, u} un juego en forma normal, donde N={i, j} es el conjunto de jugadores, S = {Si ={ A, B }, Sj = {C,D}} los conjuntos de estrategia de los jugadores, y las funciones de ganancia están resumidos en la siguiente matriz. Encontrar todos los NE en EP y EM.

	C	D
A	2, 1	0, 1
B	0, 4	2, 3

11. Relaciones comerciales entre EU y Japón. Ambos países están estudiando normas de actuación para abrir o cerrar sus mercados de importación. La matriz de pago a continuación.

		Japón	
		Abierto	Cerrado
EU	Abierto	10, 10	5, 5
	Cerrado	-100, 5	1, 1

Asumir que cada país conoce la matriz de pago y cree que el otro país actuará en su propio interés. ¿Tiene cada país una estrategia dominante? ¿Cuáles serán las normas de equilibrio si cada país actúa racionalmente para maximizar su bienestar?

Solución:

Estratega dominante

Japón elegirá abrir su mercado al margen de lo que EU decida (es siempre la decisión que maximiza su beneficio.)

EU siempre elegirá abrir su mercado al margen de lo que decida Japón. Equilibrio: El equilibrio dictado por las dos estrategias dominantes es que ambos países abran el mercado de importación. Se trata de un EN. ¿Por qué?

Ahora pensemos que Japón no está seguro de que EU se comporte racionalmente. En particular, a Japón le preocupa que los políticos estadounidenses quieran penalizarles, aunque con esa conducta no maximicen el bienestar de EU. ¿Cómo afectaría esto a la elección de estrategias de Japón?

¿Podría cambiar el equilibrio?

En este caso, Japón optaría por la estrategia Maximin (la estrategia que maximiza la producción de Japón suponiendo que EU se comporta irracionalmente). Resulta que esta estrategia consiste en seguir manteniendo abierto su sector de importación. Un mercado de importación japonés abierto sería peor para EU, y por lo tanto, la situación terminaría por volver el escenario de ambos mercados abiertos.

12. Dada la siguiente matriz de juego encontrar las utilidades esperadas, si el Jugador 1 utiliza la estrategia mixta *(p, 1-p)* = $(\frac{4}{5},\frac{1}{5})$ y el Jugador 2 utilizara la estrategia mixta *(q, 1-q)* = $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	4, -5	4, 8
	B	1, 4	0, 1

13. Considerar la “Batalla de los sexos” para encontrar un Equilibrio de Nash con estrategias mixtas.

		Juan	
		Ópera	Boxeo
María	Ópera	2, 1	0, 0
	Boxeo	0, 0	1, 2

14. Sea G ={ N, S, u } un juego en forma normal, donde N={Jugador 1, Jugador 2} es el conjunto de jugadores, S_1={A,B}; S_2={C,D} son los conjuntos de estrategia de los dos jugadores, y las funciones de ganancias están resumidas en la siguiente matriz de utilidades.

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	2, 3	2, 1
	B	1, -1	4, 3

a. Hallar los NE (en estrategias puras y mixtas).

b. ¿Cuáles son las ganancias de los jugadores al equilibrio en estrategias mixtas?

c. Dibujar las funciones de mejor respuesta.

15. Dos empresas competidoras (jugador 1, jugador 2) venden el mismo producto en un mercado compuesto por dos segmentos del mismo tamaño, A y B. Cada una de estas empresas solo tiene recursos para realizar una campaña publicitaria enfocada a uno de los segmentos. En el grupo A solo se entera el 30% de los clientes potenciales, mientras que en el B, lo hace el 70%. Si ambas firmas se anuncian en el mismo segmento, cada una venderá al 40% de los que se enteran. Si lo hace en segmentos diferentes, cada una venderá al 60% de los que se enteren.

16. Dos jugadores negocian sobre cómo dividirse un billete de $100. Han decidido que ambos elegirán simultáneamente e independientemente una porción del dinero S, ($0 \leq S \leq 1$). Si $S1+S2, \leq 1$ entonces cada jugador recibe la porción solicitada; en cualquier otro caso donarán íntegro el dinero a una asociación de beneficencia. ¿Cuáles son los NE con EP en este juego?

17. Demostrar a través del concepto de dominancia en estrategias mixtas que el siguiente juego tiene un único Equilibrio de Nash. Nota: Explorar el concepto de dominancia de estrategias mixtas sobre estrategias puras, a través del proceso EIEED.

		Jugador 2		
		I	M	D
Jugador 1	A	-2, -2	-2, 1	0, 0
	B	-2, 1	1, -2	0, 0
	C	0, 0	0, 0	1, 1

	L	R
W	2, 4	2, 5
X	2, 0	7, 1
Y	6, 5	1, 2
Z	5, 6	3, 0

18. Dos personas (J1 y J2) pueden beneficiarse de realizar una tarea pero solo si los dos la llevan a cabo. El costo del esfuerzo es $0 < c < 1$. Si la tarea es llevada a cabo, el pago es 1 para cada uno.

		Jugador 2	
		H	T
Jugador 1	H	0, 0	0, -c
	T	-c, 0	1-c, 1-c

T= trabajar H= holgazanear

¿En qué forma el equilibrio de Nash en EM se relaciona con el equilibrio en EP? ¿Cuándo ocurren cambios en C? ¿Qué implicación económica tiene esa variación?

19. El juego de la inspección.

En algunos contextos se argumenta que cuando a una persona se le paga mal se le induce a que no trabaje adecuadamente y a que realice actividades irregulares.

Una persona es contratada para realizar ciertas tareas. Este empleado puede trabajar a conciencia o dedicarse a actividades irregulares que lo benefician, pero que no le corresponde con las tareas encomendadas. Se establece un salario W por el trabajo, pero el empleado sabe que si lo descubren dedicándose a actividades irregulares lo despedirían sin pagarle, perdería el posible beneficio de sus actividades irregulares y además no se atrevería a emprender ninguna acción legal. Las actividades irregulares le reportan un beneficio de 6 al empleado, de manera que si no lo descubren obtendría un beneficio total de $W+6$ y si lo descubrieran obtendría *0*.

Por su parte, el jefe obtiene ingresos promedio de \$20 si su empleado trabaja, y de solo \$10, si se dedica a actividades irregulares, a los que hay que restar el salario W para obtener el beneficio neto. Adicionalmente el jefe incurre en un costo en término de tiempo, dedicación y dinero si decide supervisar al empleado, costo que lo valora en \$4. Así, si el jefe supervisa y el empleado trabaja, el jefe obtiene unos beneficios promedio de \$20 menos el salario W y el costo de supervisión de \$4. Si el jefe supervisa y el empleado se dedica a actividades irregulares, a los ingresos promedios de \$10 hay que restarle solamente el costo de supervisión de \$4.

a. Establecer la matriz binaria.
b. ¿Existe alguna estrategia fuertemente dominante? Considerar los casos cuando existe un salario bajo ($W < 4$) y cuando existe un salario alto ($W > 4$)
c. Encontrar una EM.

20. El Tiro de penalti.

Se tienen 2 jugadores, un delantero y un portero (eliminar la posibilidad de que el delantero falle y envíe el balón fuera de la portería o al poste) y supongamos que tiene solo 2 estrategias posibles. El delantero tiene 2 estrategias acertar (hacer) el gol al lado derecho o izquierdo de la portería. Así mismo, el portero tiene como estrategias posibles solamente lanzarse a su derecha o a su izquierda. Si los dos eligen el mismo lado de la portería, el portero parará el tiro (penalti) y obtendrá una utilidad de 1 y dejará al delantero con una utilidad de 1. Si eligen distintos lados de la portería, el delantero anotará el gol y entonces es él quien obtendrá una utilidad de 1 y el portero obtendría -1.

a. Representar la matriz binaria del juego.
b. ¿Existe un par de estrategias a las cuales podrían plegarse voluntariamente?
c. Si el delantero decide tirar un dado y si sale “5” lanzará el tiro a la izquierda y en caso contrario al derecho. ¿Cuál es el valor de las EM?
d. ¿Cuáles son las utilidades que obtienen los jugadores con la EM anterior, si el portero

decide jugar con una estrategia pura de lanzarse a la izquierda?

e. Supongamos que los dos jugadores juegan EM arbitrarias; el delantero *(p,1-p)* y el portero *(q,1-q)*. ¿Cuál es la utilidad esperada de cada jugador?, ¿Qué significan los pares de probabilidades *pq, p(1-q), (1-p)q y (1-p)(1-q)*?

f. Encontrar el equilibrio de Nash en EM.

Solución ejercicio 19. El Juego de la inspección.

La matriz de pagos viene dada de la siguiente manera:

		Jefe	
		(q) Supervisar (S)	(1-q) No supervisar (NS)
Empleado	(p) Trabajar (T)	w, 20-w-4	w, 20-w
	(1-p) Otras Actividades (OA)	0, 6	w+6, 10-w

¿Qué ocurre si el salario es w=2 (relativamente bajo) o cuando w=10(relativamente alto)? ¿Existirá un Equilibrio de Nash en estrategias puras o en estrategias mixtas?

Supongamos dos casos: a) cuando w<4 (salario bajo) y b) cuando w>4 (salario alto).

a. Cuando w<4, por ejemplo w=3, se tiene que "No supervisar" es una estrategia dominante para el jefe. Si el empleado trabaja, el jefe al supervisar, no encontrará nada irregular y habrá incurrido en un costo de 4. Si el empleado no trabaja, el salario es tan bajo que lo que deja de pagarle no compensa el costo de supervisión.

Dado que el jefe no supervisa, el empleado se dedica a actividades irregulares. Así, si W< 4 (salario bajo) el equilibrio EP consiste en que el jefe no supervise aun cuando sabe que el empleado se dedica a actividades irregulares.

b. Si el salario es mayor (W> 4) , por ejemplo w=5, se puede observar que no existe un Equilibrio de Nash en estrategias puras.

No podemos tener un equilibrio en que el jefe elija la estrategia (pura) Supervisar, pues si se tuviera, el empleado decidiría trabajar con toda seguridad. Pero esto es contradictorio porque el jefe decidiría ahorrarse el costo de supervisión y no supervisaría. No podemos tener un equilibrio en que el jefe elija No supervisar, pues entonces al empleado le convendría dedicarse a otras actividades, pero dada esta situación del empleado, al jefe sí le conviene supervisar, con lo que tenemos otra contradicción.

Así el único equilibrio es en EM. Si el jefe supervisa con probabilidad q, para que el empleado no tenga preferencias entre sus dos estrategias, se requiere que:

$$q\,(w) + (1-q)\,w = q\,(0) + (1-q)\,(w+6)$$

$$qw + w - qw = 0 + w - qw + 6 - 6q$$

$$\Longrightarrow qw + 6q = 6$$

$$\Longrightarrow q = \frac{6}{W + 6}$$

Por otra parte, si el empleado trabaja con probabilidad p, para que el jefe no tenga preferencia por ninguna de sus dos estrategias, se requiere que:

$$P(20\text{-}W\text{-}4)+(1\text{-}p)(6) = P(20\text{-}W)+(1\text{-}p)(10\text{-}W)$$

$$\Longrightarrow 20P\text{-}PW\text{-}4p+6\ \text{-}6P = 20P\text{-}PW+10\text{-}W\text{-}10P+PW$$

$$6 + 10P = 10P + P\,W + 10\text{-}W$$

$$6\text{-}10 = W(P\text{-}1) \Longrightarrow (1\text{-}P) = \frac{4}{W}$$

Pero $q = \frac{6}{W+6}$ puede reescribirse en la forma siguiente:

$$q\ (W + 6) \geq 6$$

$$qW + 6q\ \geq 6$$

$$qW\ \geq 6\text{-}6\ q$$

$$qW\ \geq 6\ (1\text{-}q)$$

$qW \rightarrow$ Es el costo de realizar otras actividades ya que el empleado pierde su salario si el jefe decide supervisar (con probabilidad q).

$6(1\text{-}q) \rightarrow$ Es el beneficio de realizar otras actividades, obtiene 6 con probabilidad $1\text{-}q$ de que su jefe no supervise.

También podemos reescribir:

P (20-W-4) + (1-p)(6) = P (20-W) + (1-p) (10-W) de forma siguiente:

$$(p\text{-}1)\ W \geq 4$$

$(1\text{-}p)W \longrightarrow$ Es el ahorro de supervisar.

$4 \longrightarrow$ Es el costo de supervisar.

De los valores de equilibrio se deduce que al aumentar el salario se reduce tanto la probabilidad de supervisión *(q)*, como la probabilidad que el empleado se dedique a otras actividades *(1-p)*.

El riesgo de perder un salario más alto actúa como instrumento de disuasión de realizar otras actividades.

Por otra parte, aunque la probabilidad de dedicarse a otras actividades sea más pequeña, el incentivo del jefe para no supervisar persiste porque el salario aumenta. En conclusión: el salario si influye sobre la decisión de trabajar o dedicarse a otras actividades.

- Con salarios muy bajos es de hecho un equilibrio que el trabajador se dedique a otras actividades y que el jefe, aun previendo que eso ocurrirá, no tenga incentivos para supervisar.
- Con salarios más altos desaparece este equilibrio, y a medida aumenta el salario, el riesgo de perderlo actúa como un fuerte incentivo que disuade al empleado de dedicarse a otras actividades que hace menos necesaria la supervisión.

Solución ejercicio 20. “El Tiro de penalti”.

a. La matriz de pago viene dada por:

		Portero	
		Izquierda	Derecho
Delantero	$\frac{1}{6}$ Izquierda	-1, 1	1, -1
	$\frac{5}{6}$ Derecha	1, -1	-1, 1

b. ¿Puede ser un equilibrio (izquierda, izquierda)? No, el delantero tendría incentivos para desviarse, lo que implica que no atenderían la recomendación. Por tanto, no hay un par de estrategias que podamos recomendarles con la característica que se apegaran voluntariamente.

c. Si lanza un dado, equivale a utilizar una estrategia mixta, que asigna una probabilidad de $\frac{1}{6}$ al lado izquierdo y $\frac{5}{6}$ al lado derecho.

d. ¿Cuáles son las utilidades?

El delantero asigna probabilidad de $\frac{1}{6}$ al lado izquierdo, y una probabilidad de $\frac{5}{6}$ al lado derecho.

El portero selecciona una estrategia pura, lanzarse al lado izquierdo (cuando el portero juega con Izquierda).

$\Rightarrow$ Con una probabilidad de $\frac{1}{6}$ al delantero le pararan el penalti y obtendrá un valor de -1, y con una probabilidad de $\frac{5}{6}$ meterá el gol y obtendrá una utilidad de 1.

$\Rightarrow$ La $u_D = (\frac{1}{6})\ (-1) + (\frac{5}{6})\ (1) = (\frac{4}{6})$

$\Rightarrow$ La $u_p = (\frac{1}{6})\ (1) + (\frac{5}{6})\ (-1) = -\ (\frac{4}{6})$

e. Supongamos ahora que los dos jugadores juegan EM arbitrarias. Si el delantero juega la EM de tirar al lado izquierdo con probabilidad *P* y al lado derecho con probabilidad *1-p*; y el portero asigna una probabilidad de q a lado izquierdo y *1-q* al lado derecho.

		Portero	
		(q) Izquierda	(1-q) Derecho
Delantero	(p) Izquierda	-1, 1	1, -1
	(1-p) Derecha	1, -1	-1, 1

$$u_D = pq(-1)+p(1-q)(1) + (1-p)(q)(1) + (1-p)(1-q)(-1)$$

$$u_p = pq(1)+p(1-q)(-1)+(1-p)(q)(-1)+(1-p)(1-q)(1)$$

El hecho que un jugador tenga la posibilidad de usar una EM no significa que le convenga utilizarla.

f. Supongamos que el delantero tira a la izquierda con probabilidad $\frac{1}{6}$ (y a la derecha con probabilidad $\frac{5}{6}$).

Consideremos al portero. Si elige la estrategia pura de tirarse a la Izquierda obtendría:

$$up = (\tfrac{1}{6})(1) + (\tfrac{5}{6})(-1) = -\tfrac{2}{3}$$

Si elige la estrategia pura de tirarse a la Derecha obtendría:

$$up = (\tfrac{1}{6})(-1) + (\tfrac{5}{6})(1) = \tfrac{2}{3}$$

Si el portero eligiera una EM con una probabilidad de ***q*** de tirarse a la izquierda, una probabilidad de (1-q) de tirarse a la derecha, dada la probabilidad $(\frac{1}{6},\frac{5}{6})$ del delantero, obtendría:

$$up = \tfrac{2}{3}-(\tfrac{4}{3})q$$

Así, dada la estrategia del delantero de asignar una probabilidad alta ($\frac{5}{6}$) a tirar al lado derecho, al portero le conviene simplemente seguir la estrategia pura de tirarse a la derecha

(obtendría $\frac{2}{3}$ *en lugar de* $\frac{2}{3} - \frac{4q}{3}$ *).*

Así no le conviene ni tirarse a la izquierda con seguridad (estrategia pura con la que obtiene -$\frac{2}{3}$), ni usar un mecanismo aleatorio asignando una probabilidad positiva para tirarse a la izquierda.

De manera que el portero sólo pondrá una probabilidad positiva a sus dos estrategias, si no tiene predilección por ninguna (lo mismo ocurrirá con el delantero).

Entonces, para que el portero siga un EM, no debe tener predilección por ninguna de sus dos estrategias.

g. Así deberá cumplirse:

$$\underbrace{(p)(1) + (1-p)\,(-1)}_{\text{Utilidad esperada del portero si se lanza a la izquierda.}} = \underbrace{(p)\,(-1) + (1-p)\,(1)}_{\text{Utilidad esperada del portero si se lanza a la derecha.}}$$

Análogamente, para que el delantero use un mecanismo aleatorio, debe cumplirse:

$$\underbrace{(q)\,(-1) + (1-q)\,(1)}_{\text{Utilidad esperada del delantero si tira al lado izquierdo.}} = \underbrace{q\,(1) + (1-q)\,(-1)}_{\text{Utilidad esperada del delantero si tira al lado derecho}}$$

Despejando p y q de ambas ecuaciones:

$$P(1) + (1-p)(-1) = P\,(-1) + (1-p)(\,1)$$
$$P-1+ p = -P +1-p$$
$$\Longrightarrow 4p = 2$$
$$\Longrightarrow p = \frac{1}{2}$$
$$q\,(-1) + (1-q)(1) = q(1) + (1-q)(-1)$$
$$-q + 1-q = q -1+ q$$
$$\Longrightarrow -4q = -2$$
$$\Longrightarrow q = \frac{1}{2}$$

Así, el único equilibrio en estrategias mixtas consiste en que el delantero tire con la misma probabilidad a la izquierda que a la derecha, y el portero se lance con la misma probabilidad a su izquierda que a su derecha.

Siempre habrá un Equilibrio de Nash si permitimos usar estrategias mixtas.

IV
Juegos de suma cero (n =2)

Son aquellos en los que no hay ninguna posibilidad de cooperación; la única forma en la cual un jugador puede aumentar su bienestar es reduciendo el de su rival.

El nombre se origina en los juegos de mesa, en donde la ganancia de un jugador es necesariamente la pérdida de su rival.

Un juego de dos jugadores tiene suma cero si:

$$u_1(s_1 , s_2) + u_2(s_1 , s_2) = 0, \forall\ s_1 \text{ en } S_1, s_2 \text{ en } S_2$$

Ejemplo: [observar que la utilidad de J_2 es el negativo de la utilidad del J_1]

		J 2	
		Izquierda	Derecha
J1	Arriba	70, -70	50, -50
	Abajo	80, -80	40, -40

$\Rightarrow$

		J 2	
		Izquierda	Derecha
J1	Arriba	70	50
	Abajo	80	40

El J1 tratara de maximizar la utilidad; mientras el J2 tratara de minimizarla.

Ejemplo: Dos empresas luchan por un mercado fijo, y al gerente de cada una de ellas se le instruye para que se preocupe solo por el porcentaje de ese mercado. Cada gerente puede mantener la tecnología con que elabora su producto actualmente o cambiar a una tecnología alternativa. Si decide cambiar, puede elegir la tecnología T1 o la tecnología T2. Cada tecnología implica diferentes características del producto. Con la tecnología actual, la empresa 1 tiene la mitad del mercado, pero tendría solo el 40% si la empresa 2 cambiara a la tecnología T1 y 45% si cambiara a la tecnología T2.

A continuación la matriz muestra cómo se reparten el mercado para cada par de decisiones.

		Gerente 2		
		Mantener	T1	T2
Gerente 1	Mantener	50, 50	40, 60	45, 55
	T1	20, 80	30, 70	50, 50
	T2	70, 30	35, 65	20, 90

Observamos que este juego no cumple las condiciones de ser un juego de suma cero, pero sí cumple que la suma de utilidades de los dos jugadores es igual a 100, para todas las combinaciones de estrategias $u_1(s_1 , s_2) + u_2(s_1 , s_2) = 100$, para todo s_1 en S_1 y para todo s_2 en S_2.

¿Cómo convertimos a este juego a uno de suma cero? Podemos restar 100 a la utilidad que obtiene el Jugador 2 en todas las combinaciones de estrategia posibles (el comportamiento del

J2 no se altera, ya que equivale a decirle al gerente 2 "preocúpese solo por el porcentaje de mercado que obtenga menos cien"). Así obtenemos la siguiente matriz:

		Gerente 2		
		Mantener	T1	T2
Gerente 1	Mantener	50, -50	40, -40	45, -45
	T1	20, -20	30, -30	50, -50
	T2	70, -70	35, -35	10, -10

Definición 6.0:

Un juego de dos jugadores tiene suma constante si:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = c,\ c \in \mathbb{R},\ \forall\ s_1 \in S_1,\ \forall\ s_2 \in S_2$$

Así, los juegos de suma constante se pueden transformar en juegos de suma cero equivalentes.

Supongamos que el Gerente 1 asume una visión pesimista y se comporta como si todo lo que no está bajo su control fuese a ocurrir de la peor forma posible, es prepararse para el peor de los escenarios posibles.

Si decide "mantener" la tecnóloga actual, supone que el G2 tomará la decisión que más le perjudica (elegir T1), lo cual le dejará con 40% del mercado; si elige T1 supone que el G2 elegirá la estrategia "mantener" y le dejará con el 20% del mercado; si elige T2 supone que el G2 elegirá T2 y le dejará con solo el 10% del mercado. ¿Cuál es la mejor decisión para el G1?

Es "mantener" la tecnología actual, con lo que asegura 40%. La estrategia que ha elegido G1, siguiendo el razonamiento anterior se conoce como su estrategia maximin (estrategia de seguridad), y la utilidad que se asegura con tal estrategia es su es su valor de seguridad o valor maximin.

Asi, para obtener la estrategia maximin, suponemos que el jugador rival elegirá la estrategia que minimice la utilidad del J1.

		G 2			
		(4º)	(2º)	(6º)	
		Mantener	T1	T2	
G 1	(1º)Mantener	50, -50	40, -40	45, -45	40
	(3º) T1	20, -20	30, -30	50, -50	20
	(5º) T2	70, -70	35, -35	10, -10	10
		-70	-40	-50	

Para cualquier estrategia s_1 en S_1, el Jugador 2 elegirá s_2 en S_2 que solucione:

$$\underset{s_2 \in S_2}{\text{Mín}}\ u_1\ (s_1,s_2)$$

El Jugador 1 elegirá s_1 en S_1 para solucionar

$$\left.\underset{s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2}{\text{Max Mín}}\ u_1\ (s_1,s_2)\ \right\}\ \text{Así, el G1 elige "mantener"}$$

El G2 también puede encontrar su estrategia de seguridad mediante un razonamiento similar al empleado por el G1.

Si G2 decide "mantener"

$\Longrightarrow$ El G1 elegirá T2 y obtendrá -70 (30%)

Si G2 decide T1

$\Longrightarrow$ El G1 elegirá "mantener" y obtendrá -40 (60%)

Si G2 decide T2

$\Longrightarrow$ El G1 elegirá T1 y obtendrá -50 (50%)

A si la decisión T1 del G2 es lo que asegura una utilidad de -40 (60%), y permite que el G1 sólo obtenga 40 (el menor valor).

La estrategia de seguridad de un J_2 es la estrategia $s_2 \in S_2$ que soluciona:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max Mín } u_2 (s_1,s_2) \\ s_2 \in S_2 ,\ s_1 \in S_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Así el G2 elige} \\ \text{T1(estrategia de seguridad)} \end{array}$$

En términos de la utilidad del J1, la estrategia de seguridad del J2 soluciona:

$$\text{Mín Max } u_1 (s_1,s_2)$$
$$s_2 \in S_2 ,\ s_1 \in S_1$$

Observar que para encontrar la estrategia de seguridad, un jugador conjetura lo que hará el otro jugador para perjudicarlo, y se prepara para ello. En un juego de suma cero, la única forma en la cual un jugador puede aumentar su utilidad es reduciendo la del otro.

¿Las estrategias de seguridad siempre forman un EN?

Suponer una variación del juego.

		Gerente 2	
		Cambiar	Mantener
Gerente 1	Cambiar	85, -85	70, -70
	Mantener	60, -60	80, -80

Aquí la estrategia de seguridad del J_1 es "cambiar" lo que proporciona un valor de seguridad de 70, y la del J_2 es "mantener", con lo que obtiene un valor de seguridad de -80 (observar que este par de estrategias no es un EN). En este juego no existe un EN en EP.

En juegos de suma cero, un par de estrategias de seguridad necesariamente formará un Equilibrio de Nash cuando el juego tenga equilibrio en estrategias puras y, recíprocamente, un EN en EP necesariamente estará constituido por un par de estrategias de seguridad.

4.1 Estrategias mixtas de seguridad

Sea M***i*** el conjunto de EM del Jugador ***i***, i = 1,2. ¿Cuál es la estrategia de seguridad del J_1? El J_1 supondrá que para cualquier estrategia $p \in M_1$, el J_2 elegirá un $q \in M_2$ que solucione.

$$\text{Mín } E_u (p,q)$$
$$q \in M_2$$

El J_1 elegirá $p \in M_1$ que maximice su utilidad esperada, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} Max\ Mín\ Eu_1\ (p,q) \\ p \in M_1,\ q \in M_2 \end{array} \right\} = V^1$$

Una estrategia ***p''*** que solucione el problema anterior es una estrategia de seguridad (maximin) del J_1, y la utilidad esperada V^1 que obtiene J_1 es su valor de seguridad o valor Maximin.

Cuando J_1 utiliza p'', se asegura al menos una utilidad esperada de V^1, es decir:

$$Eu_1\ (p'', q) \geq V^1\ \ \forall\ q \in M_2$$

Se puede hacer lo mismo para el J_2, quien también se prepara para lo peor y supone que J_1 elegirá $p \in M_1$ que minimice $Eu_2(p,q)$, es decir, J_2 elige $q \in M_2$ que maximice su utilidad esperada, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} Max\ Mín\ Eu_2\ (p,q) \\ q \in M_2,\ p \in M_1 \end{array} \right\} = V^2$$

Una estrategia q'' que solucione el problema anterior es una estrategia de seguridad (Minimax) del J_2, y la utilidad esperada V^2 que obtiene el J_2 es su valor de seguridad o valor Minimax.

Cuando el J_1 maximiza su propia utilidad esperada, está minimizando la utilidad esperada de su rival.

Una forma alternativa de definir una estrategia de seguridad del J_2, es encontrar una solución de:

$$\begin{array}{l} Min\ Max\ Eu_1\ (p,q) \\ q \in M_2,\ p \in M_1 \end{array}$$

Puesto que $Eu_1\ (p,q) = -Eu_2\ (p,q)$, $\Longrightarrow$ el valor de seguridad del J_2 es:

$$V_2 = \begin{array}{l} -Min\ Max\ Eu_1\ (p,q) \\ q \in M_2,\ p \in M_1 \end{array}$$

Cuando el J_2 usa su estrategia de seguridad q'' se asegura que el J_1 no obtendrá más de $-V^2$, es decir, se cumple:

$$Eu_1\ (p, q'') \leq -V^2,\ \forall\ p \in M_1$$

4.1.1 El Principio Minimax y Maximin

En los juegos de suma cero (los primeros analizados en la historia de los juegos), la ganancia de un jugador es siempre la ganancia del otro jugador multiplicada por -1.

Definición 7.0:

Un juego $G=\{N=i,j;\ S_i,\ S_j;\ u_i,\ u_j\}$ es un juego con suma cero si para cualquier perfil de estrategias $s_i \in S_i,\ s_j \in S_j$ tenemos:

$$u_i\ (S_i,\ S_j) = -u_j\ (S_i,\ S_j)$$

Ejemplo:

		J_j	
		C	D
J_1	A	0, 0	2, -2
	B	6, -6	5, -5

Este tipo de juego es útil cuando se analizan situaciones conflictivas entre los jugadores.

En este tipo de juego, para el Jugador *j*, minimizar la ganancia del Jugador *i* equivale a maximizar su ganancia.

$$\forall\ s_i \in S_i,\ \ \min_{s_j \in S_j} u_i\ (S_i,\ S_j) = \max_{s_j \in S_j} u_j\ (S_i,\ S_j)$$

Esto implica, un perfil de estrategias, donde:

- El Jugador *i* maximiza su ganancia, y al mismo tiempo.
- El Jugador *j* minimiza la ganancia de *i* (*ui*).

Es un perfil donde:

- El Jugador i minimiza su ganancia, y al mismo tiempo.
- El Jugador *j* maximiza la ganancia de *i* (*uj*).

Así, si el perfil de estrategia (s_i, s_j) es un EN de un juego de suma cero, la ganancia del Jugador *i* en el perfil (s_i, s_j) es la mejor ganancia de *i* cuando *j* minimiza la ganancia de *i*.

$$u_i\ (S_i,\ S_j) = \underset{t_i \in S_i\ ,\ t_j \in S_j}{Max\ Min}\ u_i\ (t_i,\ t_j)$$

S_i es la mejor estrategia para el Jugador *i* entre todas las demás y

S_j es la mejor estrategia para el Jugador *j* entre todas las demás.

De forma análoga se puede escribir que, si (S_i, S_j) es un EN, la ganancia del Jugador *i* en el perfil (S_i, S_j) es la peor ganancia de *i* (*j* minimiza la ganancia de *i*) cuando *i* maximiza su ganancia.

$$u_i\ (S_i,\ S_j) = \underset{t_j \in S_j\ ,\ t_i \in S_i}{Min\ Max}\ u_i\ (t_i,\ t_j)$$

Definición 8.0:

Sea G un juego con suma cero y con dos jugadores *i* y *j*, (S_i, S_j) es un EN, entonces:

$$u_i(S_i,\ S_j) = \underset{t_i \in \Delta(s_i),\ t_j \in \Delta(s_j)}{\mathrm{MaxMin}}\ u_i(t_i,\ t_j) = \underset{t_j \in \Delta(s_j),\ t_i \in \Delta(s_i)}{\mathrm{MinMax}}\ u_i(t_i,\ t_j)$$

- En forma análoga puede escribirse la ecuación para el Jugador *j*. Estas expresiones es el principio del Maximin y el principio Minimax.

- Este concepto es útil para analizar los juegos repetidos.
- Las estrategias Maximin, en un juego con dos jugadores, *i* , *j*, se dice que la ganancia del Jugador *i* es del tipo Minimax cuando el Jugador *j* elige la estrategia que minimiza la ganancia del Jugador *i*, y el Jugador *j* maximiza su ganancia.

Sea el juego:

		Jugador j			
		C	D	Min	
Jugador i	A	2, 4	0, 3	0	
	B	4, 1	10, 2	4	← Maximin
	Max	4	10		
		↑ Minimax			

Donde el Jugador *i* elige entre las estrategias A y B, y el Jugador *j* elige entre C y D.

La ganancia Minimax del jugador *i* está dada por:

$$\underset{s_j \in S_j,\ s_i \in S_i}{Min\ Max}\ u_i\ (S_i, S_j)$$

Se selecciona primero una estrategia S_j y buscamos la estrategia S_i que maximiza la ganancia de *i*, u_i (S_i, S_j). Se repite con todas las estrategias del Jugador *j*. Por ejemplo, si seleccionamos la estrategia C, la estrategia que maximiza la ganancia del Jugador *i* es B (*i* tiene una ganancia de 4)

Con la estrategia D, la estrategia de ***i*** que maximiza la ganancia de *i* s B (obtiene una ganancia de 10).

Ahora el Jugador *j* tiene que elegir una estrategia, pero sin maximizar su ganancia: elegirá la ganancia que minimiza la ganancia de *i*. Si *j* juega C, la mejor ganancia que *i* puede tener es 4, y si juega D, la mejor ganancia de *i* es 10. Así, *j* elegirá la estrategia C. La ganancia del Jugador *i* con el principio del Minimax es 4.

Ahora busquemos la ganancia de ***i*** con el principio Maximin.

$$\underset{s_i \in S_i,\ s_j \in S_j}{Min\ Max}\ u_i\ (S_i, S_j)$$

La diferencia está en el orden de las búsquedas de las estrategias de los jugadores. Seleccionar primero una estrategia de ***i*** y buscamos la estrategia de ***j*** que minimiza la ganancia de ***i***, y se hace lo mismo con las otras estrategias de ***i***, al final el jugador ***i*** elige la estrategia ***i*** que maximiza su ganancia.

Si *i* juega A, la estrategia de *j* que minimiza la ganancia de *i* es D (*i* tiene una ganancia de 0). Si *i* juega B, la estrategia de *j* que minimiza la ganancia de *i* es C (*i* tiene una ganancia de 4), entonces la estrategia de *i* que maximiza su ganancia cuando *j* quiere minimizar la ganancia de *i* es B. Así, la ganancia del jugador *i* con el principio del Maximin es 4, que es la misma cuando utilizamos el principio del Minimax, esta ganancia se puede denotar por v_i.

Siempre se cumple

$$\underset{s_i \in S_i,\, s_j \in S_j}{MaxMin}\; u_i(S_i, S_j) = v_i = \underset{s_j \in S_j,\, s_i \in S_i}{MinMax}\; (S_i, S_j)$$

Nota: También se puede encontrar el valor de v_j.

Ejercicio:

Considerar el juego del "Dilema del prisionero" con las ganancias siguientes. Encontrar el valor de v_i con el principio de Minimax y Maximnin.

	Confesar	NC
Confesar	2, 2	0, 5
NC	5, 0	1, 1

		P2		
		C	NC	Min
P1	C	2, 2	0, 5	0
	NC	5, 0	1, 1	1 ← Maximin
	Max	5	1	
			↑ Minimax	

Criterio Maximin.

- Si P1 juega C, la estrategia que minimiza la ganancia de P1 es NC que proporciona una ganancia de 0.
- Si P1 juega NC, la estrategia que minimiza la ganancia de P1 es NC que proporciona a P1 una ganancia de 1.
- El P1 quiere maximizar su ganancia. Si juega NC la peor ganancia que puede obtener es 1, y si juega C la peor ganancia que puede obtener es 0.

⟹ P1 elige NC (mayor valor); así el valor v_i=1; el perfil de estrategia es (NC,NC).

Criterio Minimax.

- Si P2 juga C, la estrategia que maximiza la ganancia de P1 es NC, que proporciona una ganancia de 5.
- Si P2 juega NC, la estrategia que maximiza la ganancia de P1 es NC, que proporciona una ganancia de 1.
- El P2 quiere minimizar la ganancia del P1. Si P2 juega NC la mejor ganancia que puede obtener P1 es 1, y si juega C la mejor ganancia que obtiene P1 es 5.

⟹ P2 elige NC (menor valor); así, el valor v_i= 1; el perfil de estrategia (NC, NC).

Ahora, encontrar el valor j, obtenido cuando P1 quiere minimizar la ganancia de P2, y P2 quiere maximizar su ganancia.

		P2		
		Confesar	NC	Max
P1	Confesar	2, 2	0, 5	5
	NC	5, 0	1, 1	1 ← Minimax
	Min	0	1	
			↑ Maxmin	

Maximin

- Si P1 juega C, la estrategia que maximiza la ganancia de P2 es NC que proporciona una ganancia de 5.
- Si P1 juega NC, la estrategia que maximiza la ganancia de P2 es NC, que proporciona una ganancia de 1.
- El P1 quiere minimizar la ganancia de P2.

i. Si juega NC la mejor ganancia que puede obtener es 1.

ii. Si juega C la mejor ganancia que puede obtener es 5.

$\Rightarrow$ P1 elige NC (el menor valor); así, el valor $v_j = 1$; en el perfil de estrategia (NC,NC).

Minimax.

- Si P2 juega C, la estrategia que minimiza la ganancia de P2 es NC, que proporciona una ganancia de 0.
- Si P2 juega NC, la estrategia que minimiza la ganancia de P2 es NC, que proporciona una ganancia de1.
- El P2 quiere maximizar su ganancia.

i. Si juega NC la menor ganancia que puede obtener es 1.

ii. Si juega C la menor ganancia que puede obtener es 0.

$\Rightarrow$ P2 elige NC (el mayor valor); así, el valor $v_j = 1$; en el perfil de estrategia (NC,NC)

Puede observarse que $v_i = v_j$.

4.2 Punto de silla de montar.

En algunos juegos el Maximin y Minimax no son lo mismo. Dado el siguiente juego, con los jugadores María y Juan, cada uno con sus estrategias:

		Juan			
		A	B	Min	
María	A	2	- 3	-3	
	B	0	2	0	← Max Min
	C	-5	10	-5	
	Max	2	10		
		↑ Min Max			

María puede asegurar que ganará al menos 0, y Juan puede asegurar que ganará no más de 2.

Sabemos que en algunos juegos el valor Maximin y Minimax son diferentes, por ejemplo:

		Juan			
		A	B	Min	
María	A	2	-3	-3	
	B	0	3	0	← Max Min
	Max	2	3		
		↑ Min Max			

Ningún jugador querrá jugar una estrategia simple con certeza, el único plan podría ser utilizar la estrategia con cierta probabilidad (EM). Si Juan utiliza una moneda y decide utilizar la estrategia A con probabilidad $\frac{1}{2}$ y la estrategia B con probabilidad $\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Si María juega A, ella obtendrá un pago de 2 con probabilidad $\frac{1}{2}$, y un pago de -3 con probabilidad de $\frac{1}{2}$.

Así, el pago esperado de María cuando selecciona la estrategia A es:

$$u_1 = (\frac{1}{2})\ (2) + \frac{1}{2}\ (-3) = -\frac{1}{2}$$

Y si María selecciona B $\Longrightarrow u_1 = (\frac{1}{2})\ (0) + \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2}$

Si María sabe o adivina que Juan jugará dicha EM,

$\Longrightarrow$ María debería jugar la estrategia B$=\frac{3}{2}$ (obtiene mayor ganancia), esto es llamado "el principio del valor esperado".

Si tú sabes que tu oponente está jugando una EM determinada, y que continuará jugando de acuerdo a lo que tú hagas, tú deberías jugar tu estrategia la cual tiene un mayor valor esperado.

Ahora consideremos la situación del punto de vista de Juan.

Si Juan usa la EM $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y María adivina esto, María podría tomar ventaja de su conocimiento para obtener un pago esperado de $\frac{3}{2}$. Juan podría considerar usando una EM con diferentes probabilidades, por ejemplo: $(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = (q,\ 1-q)$.

¿Podría haber alguna opción de probabilidades, en la cual María no podría tomar ventaja?

Supongamos que Juan juega una EM con probabilidad $(q,\ 1-q),\ 0 \leq q \leq 1$. Calcular los valores esperados para María.

		Juan	
		(q) A	*(1-q)* B
María	A	2	-3
	B	0	3

Si María selecciona A:

$$q\ (2) + (1-q)\ (-3) = 2q - 3 + 3q = 5q - 3$$

Si María selecciona B:

$$q\ (0) + (1-q)\ (3) = 3 - 3q$$

María no será capaz de tomar ventaja de la EM de Juan si estos dos valores esperados son lo mismo, es decir:

$$5q - 3 = 3 - 3q \Longrightarrow 8q = 6 \Longrightarrow q = \frac{3}{4}$$
$$\Longrightarrow 1-q = \frac{1}{4}$$

Así, si Juan juega la EM $(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$, Juan puede asegurar que María ganará, en promedio, no más que $\frac{3}{4}$ por juego independientemente de cómo juegue María.

Si María juega A:

$$(\frac{3}{4})\ (2) + (\frac{1}{4})\ (-3) = \frac{3}{4}$$

Si María juega B:

$$(\frac{3}{4})\ (0) + (\frac{1}{4})\ (3) = \frac{3}{4}$$

Es importante pensar acerca de cómo Juan podría en la práctica jugar una EM con esas probabilidades (asignar mediante algún proceso aleatorio, tirar una moneda, generar números aleatorios entre 0 y 1, y jugar B si dicho número es mayor a 0.75, etc).

Ahora consideremos el punto de vista de María, intentando encontrar una EM (*p, 1– p*) para la cual Juan no puede tomar ventaja. Ahora, para Juan encontremos los valores esperados.

Si Juan juega A:

$$p\,(2) + (1-p)\,0 = 2p$$

Si Juan juega B:

$$p\,(-3) + (1-p)\,3 = 3 - 6p$$

Igualando las dos ecuaciones, tenemos:

$$2p = 3-6p \Longrightarrow p = \frac{3}{8} \Longrightarrow 1-p = \frac{5}{8}$$

Si María juega una EM $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ ella se asegura de ganar, en promedio, al menos $\frac{3}{4}$ por juego, de acuerdo de cómo juegue Juan.

Si juega A:

$$(\frac{3}{8})(2) + (\frac{5}{8})(0) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Si juega B:

$$(\frac{3}{8})\,(-3) + (\frac{5}{8})(3) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Así, María tiene una EM que le asegura un pago esperado de al menos $\frac{3}{4}$. Juan tiene una EM, la cual le asegura que el pago esperado de María no será mayor a $\frac{3}{4}$.

La Teoría de Juegos prescribe lo siguiente:

- $\frac{3}{4}$ es el valor del juego (v_i).
- $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ es la estrategia óptima de Juan.
- $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ es la estrategia óptima de María.

Estos valores son denominados "La solución del juego".

Existe un teorema que establece que cada matriz de juego tiene como tal una solución, ya sea en EP o en EM.

Un método abreviado para calcular soluciones de EM para juegos 2x2 (Willams,1986) se ilustra a continuación:

		Juan	
		A	B
María	A	2	-3
	B	0	3

Diferencia entre filas

$$\begin{array}{lcl} 2-(-3)=5 & +3 & \\ 0-(3)=-3 & 5 & \left.\begin{array}{c}\frac{3}{8}\\ \frac{5}{8}\end{array}\right\} \text{Probabilidad de María} \\ & \Sigma 8 & \end{array}$$

Diferencia entre columnas

$$\begin{array}{lcl} 2-0 = 2 & 6 & \\ -3-3 = -6 & 2 & \left.\begin{array}{c}\frac{6}{8} = \frac{3}{4}\\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\end{array}\right\} \text{Probabilidad de Juan} \\ & \Sigma 8 & \end{array}$$

Los valores Maximin y Minimax que hemos encontrado anteriormente son equivalentes al concepto de "punto de silla de montar".

Definición9.0:

El resultado de un juego es llamado "punto de silla de montar" si el ingreso de un resultado es menor que o igual a cualquier ingreso en su fila, y más grande que o igual que cualquier entrada/ingreso en su columna.

Principio de silla de montar:

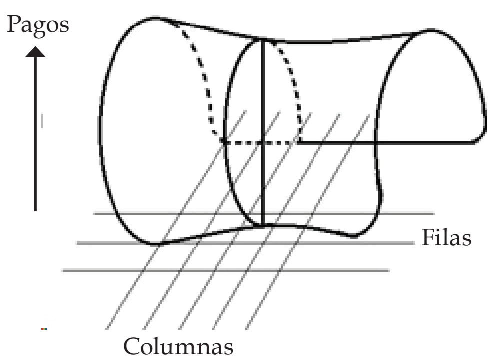
Si una matriz de un juego tiene un "punto de silla de montar" (PSM), ambos jugadores jugarían una estrategia en la cual está contenida.

Definición 10.0:

Para cualquier matriz de un juego, si hay un número v_i tal que el Jugador 1 tiene una estrategia la cual garantiza que ganará al menos v_i, y el Jugador 2 tiene una estrategia la cual le garantiza que el Jugador 1 ganará no más que v_i, entonces v_i es llamado " el valor del juego".

Si un jugador tiene un PSM, el ingreso del PSM es el valor del juego.

Figura 4.1: Punto de Silla de Montar



En general, un punto de una función donde las derivadas tienen un valor de cero, porque la función toma un valor máximo para incrementos de una variable y un valor mínimo para incrementos de la otra variable (por lo que, el punto no es ni un máximo ni un mínimo) es llamado un punto de silla de la función, ya que la gráfica tiene un parecido a una silla de montar.

En el ejemplo siguiente, los números encerrados en círculos son PSM. Si Max-Min = Min-Max, entonces se presentan en las estrategias de PSM. En el ejemplo, los 2 PSM están en las estrategias (A, B), (A, D), (C, B) y (C, D).

		Juan					
		A	B	C	D	Min	
María	A	4	2	5	2	2	
	B	2	1	-1	-20	-20	Maximin
	C	3	2	4	2	2	
	D	-16	0	16	1	-16	
	Max	4	2	16	2		
			Minimax				

Observar que habrán casos en los cuales los valores Maximin y MiniMax no son lo mismo, entonces se dice que no tiene un PSM. En el juego siguiente; por ejemplo:

		Juan			
		A	B	Min	
María	A	2	- 3	-3	
	B	0	2	0	Maximin
	C	-5	10	-5	
	Max	2	10		
		Minimax			

Se observa que no existe un PSM. María puede asegurar que ella ganará al menos 0, y Juan puede asegurar que María no ganará más de 2.

El método abreviado para calcular soluciones en EM para juegos 2x2 se utiliza cuando no existe un PSM; es decir, es importante que se verifique un PSM antes de utilizar el método abreviado para encontrar una EM óptima.

Ejemplo: Dado el siguiente juego encontrar las proporciones óptimas.

		J2 (Oponente)		
		A	B	Min
J1	A	1	-2	-2
	B	-1.5	2	-1.5 ← Maximin
	Max	1	2	
		↑ Minimax		

Valores diferentes ⟹ No existe un PSM

Entonces se necesita encontrar una EM.

		J2	
		A	B
J1	A	1	-2
	B	-1.5	2

Diferencia entre filas

$1-(-2)=1+2=3$ $\quad 3.5 \quad \frac{3.5}{6.5}= 0.54$ Probab. J1

$-1.5 -2 = -3.5$ $\quad 3 \quad \frac{3}{6.5}= 0.46$

Diferencia entre columnas

$1 - (-1.5) = 1 + 1.5 = 2.5$ $\quad 4 \quad \frac{4}{6.5} = 0.62$ Probab. J2

$-2-2 = -4$ $\quad 2.5 \quad \frac{2.5}{6.5} = 0.38$

Observar que el J1 jugará las estrategia A más que B; y que el oponente jugará la estrategia A más que B (0.62 > 0.38).

Otra forma equivalente es encontrar las EM, igualando los valores esperados para cada estrategia.

		J2	
		A	B
J1	(p)A	1	-2
	($1-p$)B	-1.5	2

Supongamos que el J1 selecciona A con una probabilidad P, y

Supongamos que el J1 selecciona B con una probabilidad (1-p).

Si el oponente (J2) selecciona A ⟹ el pago esperado para J1 es:

$$p\,(1) + (1-p)\,(-1.5) = 2.5p - 1.5$$

Si el oponente (J2) juega B ⟹ el pago esperado para J1 es:

$$p\,(-2) + (1-p)\,(2) = 2 - 4p$$

Ahora, igualando los dos pagos esperados se tiene:

$$2.5p - 1.5 = 2 - 4p \quad p = \frac{3.5}{6.5} = 0.54$$

$$\Longrightarrow 1-p = 1-0.54 = 0.46$$

Así el J1 debe jugar la estrategia A el 54% y la estrategia B el 46%

Luego el J1 tiene un valor del juego de:

$$p(1) + (1-p)\,(-1.5)$$

$$1(0.54) + (-1.5)\,(0.46)$$

$$= -\,0.15$$

Para el oponente, se tiene un valor del juego de[11]:

$$q(1)+(1-q)(-2) = (-1)\,(0.62)+(2)(0.38) = 0.15$$

11 Se cambian los signos para los pagos específicos del oponente (Juego suma cero).

Así se tiene un juego de suma cero. ¿Por qué?

Por lo tanto, el J1 perderá en promedio 0.15 por cada juego y el oponente J2 ganará 0.15.

El método para analizar juegos de estrategia mixta no funciona si uno o más jugadores tienen más de dos estrategias.

Más allá de juegos *2x2*, los próximos juegos más complicados son *2xn*, donde María tiene 2 estrategias puras y Juan tiene *n*>2, o *mx2*, donde María tiene *m*>2 estrategias puras y Juan tiene 2.

Si tales juegos no tienen un PSM, resulta que siempre tiene una solución, la cual es una solución de EM a uno de sus subjuegos *2x2* Para un ***m*** o ***n*** grande, puede haber un gran número de sus subjuegos *2x2* para tratar. Afortunadamente hay una técnica gráfica elegante para encontrar subjuegos *2x2* que dan la solución al juego.

4.3 Juegos de la forma mx2 y 2xn

Considerar el juego 3x2 (mx2)

		Juan	
		A	B
María	A	2	-3
	B	0	2
	C	-5	10

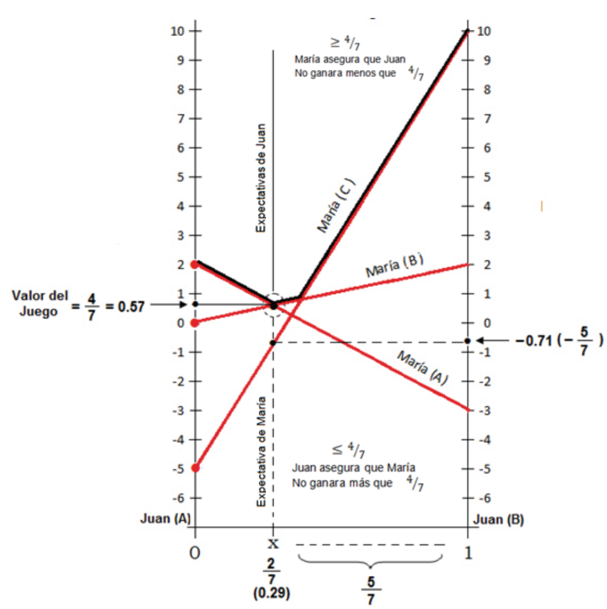
Ya hemos verificado que este juego no tiene un PSM.

La solución a este tipo de juegos es la siguiente:

Para cada estrategia de María, marcamos el pago si Juan juega la estrategia A en el eje izquierdo del siguiente gráfico, marcamos el pago si Juan juega la estrategia B en el eje derecho, y luego conectarlos en una línea. Observar que la coordenada vertical de esta línea arriba de cualquier punto de X le da un pago esperado a María, si Juan juega una EM (1-X) A, XB.

Si María sabe o adivina la EM de Juan, ella podría tomar ventaja para seleccionar la mejor respuesta, la cual podría significar que el resultado fuera superior al segmento de la línea gruesa del gráfico.

Pagos de María



Juan querría elegir x para hacer el pago correspondiente a María como el menor (más pequeño) posible para obtener el punto más bajo del segmento de línea gruesa. Ya que este punto (círculo) está en la intersección de las líneas de la estrategia de María (A) y María (B), el apropiado subjuego a resolver es:

		Juan A	Juan B	Probab. de María
María	A	2	-3	$\frac{2}{7}$
	B	0	2	$\frac{5}{7}$
Probab. de Juan		$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	

María jugaría A con probabilidad $\frac{2}{7}$, jugaría B con probabilidad $\frac{5}{7}$, y nunca debe jugar la estrategia C.

Se puede hacer una verificación de que esta solución del juego es la óptima, haciendo los siguientes cálculos:

Expectativas de María si Juan juega $(\frac{5}{7})$ A y $(\frac{2}{7})$ B

María (A): $(\frac{5}{7})\ (2) + (\frac{2}{7})\ (-3) = \frac{4}{7}$

(B): $(\frac{5}{7})\ (0) + (\frac{2}{7})\ (2) = \frac{4}{7}$

(C): $(\frac{5}{7})\ (-5) + (\frac{2}{7})\ (10) = -\frac{5}{7}$

Expectativas de Juan si María juega $(\frac{2}{7})$ A y $(\frac{5}{7})$ B

Juan (A): $(\frac{2}{7})\ (2) + (\frac{5}{7})\ (0) + (0)(-3) = \frac{4}{7}$

(B): $(\frac{2}{7})\ (-3) + (\frac{5}{7})(2) + (0)(10) = \frac{4}{7}$

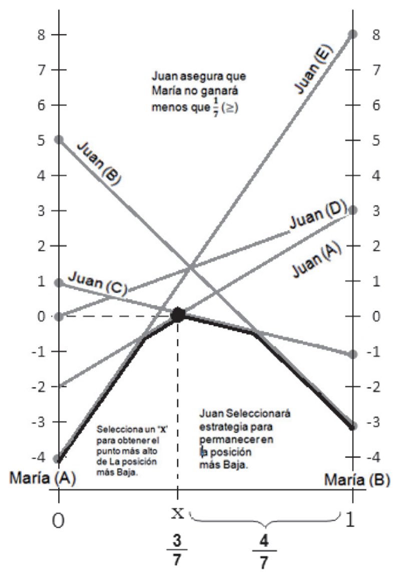
Lo principal del resultado es que todas las expectativas de María son $\leq \frac{4}{7}$, y todas las expectativas de Juan son $\geq \frac{4}{7}$.

Así, Juan asegura que María no ganará más que $\frac{4}{7}$, y María asegura que Juan no ganará menos que $\frac{4}{7}$; así el valor del juego es $\frac{4}{7}$.

Observar en la gráfica que, el punto más bajo en la línea gruesa se encuentra arriba de x = $\frac{2}{7}$ ($\frac{5}{7}$ del recorrido hacia la estrategia A de Juan). La coordenada vertical de este punto es $\frac{4}{7}$, el valor del juego. Arriba de x = $\frac{2}{7}$ la línea para María (Estrategia C) tiene una coordenada vertical de $-\frac{5}{7}$, un valor más bajo que el valor del juego, lo cual es por lo que María (Estrategia C) no debería ser usada.

Para juego *2xn* se puede aplicar la misma técnica gráfica, con algún importante cambio.

		Juan A	Juan B	Juan C	Juan D	Juan E	
María	A	-2	5	1	0	-4	$\frac{4}{7}$
	B	3	-3	-1	3	8	$\frac{3}{7}$
		$\frac{2}{7}$		$\frac{5}{7}$			



Juan trataría de seleccionar su estrategia para permanecer en la posición más baja, y María querría seleccionar un valor x para obtener el punto más alto de la posición más baja. Esto implica la estrategia A y la estrategia C de Juan.

Las estrategias más óptimas son:

Juan $(\frac{2}{7}, 0, \frac{5}{7}, 0, 0)$

María $(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}) = (A, B)$

Expectativas de María, si Juan juega $(\frac{2}{7})$ A y $(\frac{5}{7})$C

María (A): $(\frac{2}{7})\ (-2) + (\frac{5}{7})\ (1) = \frac{1}{7}$

María (B): $(\frac{2}{7})\ (3) + (\frac{5}{7})\ (-1) = \frac{1}{7}$

Expectativas de Juan, si María juega $(\frac{4}{7})$A y $(\frac{3}{7})$B:

Juan (A): $(\frac{4}{7})\ (-2) + (\frac{3}{7})\ (3) = \frac{1}{7}$

Juan (B): $(\frac{4}{7})\ (5) + (\frac{3}{7})\ (-3) = \frac{11}{7}$

Juan (C): $(\frac{4}{7})\ (1) + (\frac{3}{7})\ (-1) = \frac{1}{7}$

Juan (D): $(\frac{4}{7})\ (0) + (\frac{3}{7})\ (3) = \frac{9}{7}$

Juan (E): $(\frac{4}{7})\ (-4) + (\frac{3}{7})\ (8) = \frac{8}{7}$

El valor del juego es $\frac{1}{7}$. Lo importante es verificar que todas las expectativas de Juan en contra de las expectativas de María son ≥ $\frac{1}{7}$.

¿Qué ocurre con juegos donde ambos jugadores tienen más de dos estrategias que seleccionar? John Von Newman demostró que todos ellos tienen soluciones.

4.4 Ejercicios de Juegos de Suma Cero

1. Obtener un valor v_i con el principio Maxi-Min y Mini-Max de los siguientes juegos:

a)

		j	
		C	D
i	A	0, 1	2, 0
	B	4, 4	3, 5

b)

		j	
		C	D
i	A	2, 5	3, -1
	B	-2, 0	5, 3

c)

		María	
		Fútbol	Ballet
Juan	Fútbol	4, 1	0, 0
	Ballet	0, 0	1, 4

d)

		j	
		A	B
i	K	3	1
	L	1	2
	M	2	2

Para el ejercicio b), demostrar que los valores $v_i \neq v_j$.

2. Encontrar el valor Maxi-Min y Mini-Max para el juego Piedra-Papel-Tijera y para el juego de Las Monedas.

a)

		Juan		
		Pi	Pa	Ti
María	Pi	0, 0	-1, 1	1, -1
	Pa	1, -1	0, 0	-1, 1
	Ti	-1, 1	1, -1	0, 0

b)

		J2	
		Cara	Cruz
J1	Cara	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Para el caso b), encontrar una EM para J1 y J2.

3. Dado el siguiente juego de Suma Constante, transformarlo en un juego de Suma Cero y encontrar el valor v_i.

		j	
		C	D
i	A	60, 60	70, 50
	B	80, 40	75, 45

¿Cuál es la estrategia de seguridad para el jugador *i*?

4. Encontrar el valor j para el juego del dilema del Prisionero.

		j	
		C	NC
i	C	2, 2	0, 5
	NC	5, 0	1, 1

5. Encontrar un PSM en cada juego; si no existe, resolver a través de la técnica gráfica, encontrando subjuegos.

a) *mx2*

	A	B
A	-3	5
B	-1	3
C	2	-2
D	3	-6

b) *mx2*

	A	B
A	-2	5
B	1	2
C	0	-2
D	0	4

c) *2xn*

	A	B	C	D	E
A	-4	2	0	3	-2
B	4	-1	0	-3	1

6. Dada la matriz de juego 3x3, aplicar el método de Expectativas de Igualación.

	A	B	C
A	3	0	1
B	-1	2	2
C	1	0	-1

Encontrar la solución del juego y el valor del juego.

7. Considerar el juego 2x2.

		Juan	
		A	B
María	A	a	b
	B	c	d

El juego tendrá un PSM a menos que las dos entradas más grandes estén diagonalmente opuestas cada una de la otra. Así, suponer que las dos entradas (ingresos) más grandes son $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{d}$. suponer que Juan juega A y B con probabilidad x y (1 – x).

a. Mostrar que el valor de x, el cual igualará las expectativas de María para la estrategia A de María, y la estrategia B de María es

$$x = \frac{d-b}{(a-c)+(d-b)}$$

b. Mostrar que el valor del juego es

$$v = \frac{ad-bc}{(a-c)+(d-b)}$$

8. Considerar el siguiente juego aplicado a la Antropología

LA PESCA JAMAICANA

Una importante escuela de Antropología reflexionó sobre el conocido "Funcionalismo", el cual sostiene que las costumbres, las instituciones o patrones de comportamiento en una sociedad pueden ser interpretados como una respuesta funcional a los problemas con los cuales la sociedad enfrenta; así, un método para comprender la organización de las sociedades podría ser identificar problemas y tensiones, ver qué tipo de comportamiento proporcionaría buenas soluciones y comparar patrones de comportamiento de la sociedad de aquellas soluciones.

La primera aplicación cuantitativa de la teoría de juegos de dos personas al problema antropológico fue realizada por Davenport (1960), sobre la pesca jamaiquina, que estudió una vía de 200 personas en la costa sur de Jamaica, cuyos habitantes vivían de la pesca. La zona de pesca se extiende hacia fuera de la costa (mar adentro), a unos 22 kilómetros. Analizó 26 tripulaciones de pescadores en navegación, en tres días de pesca cada semana. La zona de pesca era dividida hacia adentro y hacia afuera de la orilla. Hacia adentro de la orilla (*inside*) se encuentra de 5 a 10 kilómetros; mientras que hacia afuera de la orilla (*outside*-mar adentro) se encuentra más allá de los 10 kilómetros. Hacia adentro de la orilla esta siempre protegida de las corrientes fuertes. La zona entre *inside* y *outside* la llamaremos *in-out*, que es donde inician corrientes fuertes.

Así, los capitanes de las canoas pueden posiblemente adoptar 3 estrategias diferentes para pescar:

Inside: Colocar todas las canoas al interior de la orilla.

Outside: Colocar todas las canoas al otro lado de la orilla.

In-out: Colocar algunas canoas al interior de la orilla, y algunas al otro lado de la orilla (mar adentro).

Estas estrategias tienen algunas ventajas y desventajas:

1. Ya que el tiempo de recorrido es más largo, las tripulaciones siguen las estrategias *outside* o *in-out*, que pueden establecer un número menor de canoas.
2. Cuando la corriente es alta, es perjudicial para las canoas del otro lado de la orilla porque pueden sufrir accidentes y el pescado puede morir por los cambios de temperatura y otras condiciones inducidas por la corriente.
3. Al otro lado de la orilla produce una alta calidad de pescado (en variedades y tamaños).
4. Las canoas en la zona *outside* o *in-out* requieren de canoas más resistentes. Los pescadores de la zona *inside* a menudo compran sus canoas usadas de los pescadores, quienes van al otro lado de la orilla *outside*, las cuales son más nuevas y más resistentes.

Davenport recolectó datos para estimar el pago de las tres posibles estrategias, cuando la corriente está en marcha y cuando la corriente no está en marcha. Los pagos de la matriz son un promedio de los beneficios en libras por mes de pesca de una canoa.

Así, la matriz siguiente puede ser vista como un juego 3x2.

		Corriente	
		Marcha	No marcha
Pescador	Inside	17.3	11.5
	Outside	-4.4	20.6
	In-Out	5.2	17.0

i. Encontrar el valor del juego.

ii. Las estrategias óptimas.

iii. ¿Cómo se compara la solución del juego con el comportamiento de los aldeanos? ¿Por qué no utilizan la estrategia *outside*?

iv. ¿Cuál es la conclusión del juego?, ¿Podría haber una falla para este juego?

v. ¿Qué significa el valor del juego encontrado, desde la perspectiva del Mini-Max?

vi. ¿Qué pasa si los pescadores utilizan una EM del 25% con la estrategia “Marcha”?.

vii. Calcular el valor esperado de sus diversas estrategias.

viii. Suponer que en un año la corriente corra (Marcha) en un 35% del tiempo. ¿Cuáles son los pagos esperados?

9. Considerar el siguiente juego aplicado a conflictos (fenómeno de la guerra).

GUERRILLAS v.s. POLICÍAS

Los juegos de suma cero representan situaciones de conflicto y la solución teórica para ellos, describe estrategias racionales para el conflicto. Dado que la mayoría de la forma extrema del conflicto es la guerra, no es sorprendente que algunas de las primeras aplicaciones propuestas en la teoría de juegos fueran tácticas de guerra.

Supóngase que hay *m* guerrillas, *n* policías, y 2 arsenales de Gobierno a los cuales la guerrilla les gustaría capturar, y la Policía debe defender. La guerrilla atacará uno o ambos arsenales y ellos capturaran cualquier arsenal atacándolo con más fuerza respecto a los policías (que defienden).

La guerrilla gana el juego si ellos capturan incluso un arsenal (ellos tiene armas para continuar atacando), la Policía gana solamente si ellos defienden con éxito ambos arsenales.

La guerrilla puede sin duda ganar si $m>n$: ellos solo atacarán a cualquiera de los dos arsenales con toda su fuerza. La Policía gana si $n \geq 2m$: ellos defienden cada arsenal con fuerza de al menos m. Lo interesante del caso es cuando $m \leq n \leq 2m$.

Para hacerse una idea de esta situación, suponer $m = 2$ *y* $n = 3$.

El reto de la guerrilla es como dividir su fuerza entre los dos arsenales 2 – 0 o 1 – 1.

Si ellos dividen 2 – 0, ellos aún tienen que decidir cuál arsenal atacar. Ellos decidirán aleatoriamente, ya que cualquier solución no aleatoria puede ser anticipada por la Policía.

La Policía debe decidir si divide 3 – 0 o 2 – 1, y entonces decidir (aleatoriamente) dónde enviar la fuerza más fuerte. La matriz se presenta a continuación, con los pagos de las guerrillas (1 para un ganador, 0 para un perdedor). Un pago de $\frac{1}{2}$ si la guerrilla divide 2 – 0, $\frac{1}{2}$ del tiempo, atacarán al arsenal, el cual tiene la fuerza de defensa más fuerte y perderán; la otra mitad del tiempo ellos atacarán al arsenal más débil y ganaran.

		3 Policías	
		3-0	2-1
2 Guerrillas	2-0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2-1	1	0

¿Cuál es el valor del juego?
¿Cuál es la estrategia Óptima?

Para otras fortalezas la estrategia óptima puede ser una estrategia Mixta; considerar el siguiente escenario:

		4 Policías		
		4-0	3-1	2-2
4 Guerrillas	4-0	$\frac{1}{2}$	1	1
	3-1	1	$\frac{1}{2}$	1
	2-2	1	1	0

i. Encontrar la solución para la guerrilla y para los policías.

ii. Encontrar el valor del juego.

10. Considerar el siguiente juego aplicado a conflictos (la guerra de las galaxias)

STAR – WARS

Considerar un problema de penetración de misiles (Jhonson, 1966) aplicable al programa de defensa de misiles como el programa "Star Wars" de los Estados Unidos (1980) llamaremos a los países "*Red*" y "*Blue*". Suponer que Red desea destruir la base militar de *Blue*. *Red* tiene 4 misiles los cuales serán disparados en secuencia. Dos de los misiles tienen ojivas reales; mientras que otras dos están vacías. Para la defensa, *Blue* tiene anti-misil. Cada antimisil puede examinar dos misiles de *Red* y destruir el primero que tiene una ojiva real.

Red debe escoger el orden en el cual enviará la ojiva real y las vacías. Usaremos la notación en la cual DWWD significa enviar una ojiva: vacía, ojiva real, real, vacía; en ese orden la selección de *Blue* es cuando dispara los antimisiles.

Otra notación será que 13 significa disparar en la primera y tercer misil de *Red*. *Blue* gana el juego (Pago 1), si *Blue* destruye ambas ojivas de red; *Blue* perderá (Pago 0), si incluso se recibe una ojiva a través de *Red*. Para ilustrar cómo los pagos son calculados, considerar *Blue* 12 contra *Red* DWWD. El primer antimisil de *Blue* observa misiles de red #1 y #2, y elimina #2, el cual tiene una ojiva viva; el segundo antimisil *Blue* puede rastrear misiles de red #2 y #3. *Red* #2 ha sido eliminada, de manera que este antimisil eliminará *Red* #3. *Blue* gana, obtiene un pago de 1. La Matriz se presenta a continuación:

		Red					
		WWDD	WDWD	WDDW	DWWD	DWDW	DDWW
	12	1	1	0	1	0	0
	13	0	1	1	1	1	0
Blue	14	0	0	1	0	1	0
	23	0	0	0	1	1	1
	24	0	0	0	0	1	1
	34	0	0	0	0	0	1

Encontrar la solución del juego.

11. Considerar el siguiente juego aplicado a la Biología.

ESTRATEGIAS ESTABLES EVOLUTIVAMENTE (ESS)

La idea de ESS fue introducida por Maynord Smith y G.R Price (1973) es una idea que explica la Biología evolutiva. Es especialmente aplicable al estudio del comportamiento y tiene su base en la moderna Sociobiología. La idea básica radica en que por qué miembros individuales de una especie biológica tienen similares necesidades, y recursos limitados situaciones de conflicto a menudo aparecerán. En esta situación de conflicto hay diferentes patrones (estrategias) de comportamiento que pueden seguir en forma individual. En estos casos la Teoría de Juegos puede ayudar a seleccionar dichos patrones de comportamiento (lo que toma el lugar de la racionalidad es la presión evolutiva, la selección natural).

Miembros de una especie se comprometerán en repetidos conflictos aleatorios bajo el mismo recurso. Cada conflicto es entre dos miembros y solamente uno puede ganar; el recurso es valorado con 50 puntos.

Los puntos son interpretados como un incremento a la probabilidad de pasar genes a la próxima generación. Supongamos que un individuo tiene solamente dos estrategias posibles: Halcón y Paloma.

Un Halcón lucha por el recurso; una Paloma solo se involucra en un conflicto simbólico; adopta postura, pero en realidad no lucha. Si ambos jugadores adoptan la estrategia Halcón, ellos lucharan hasta que uno es lesionado. El ganador obtendrá el recurso con un valor de 50 puntos, mientras el perdedor obtendrá 0 puntos. Si un Halcón encuentra una Paloma siempre ganará el recurso. La matriz se presenta a continuación.

		J2	
		H	P
J1	H	-25	50
	P	0	15

¿Qué ocurre si se tiene una población mixta, por ejemplo $\frac{1}{4}$ de Halcones y $\frac{3}{4}$de Palomas? ¿Qué población se incrementa, los Halcones o las Palomas?

12. Encontrar una EM en la cual la proposición de Halcones y Palomas tengan un balance en el incremento de la población. Esta solución es denominada estrategia estable evolutivamente (ESS).

APAREAMIENTO ASIMÉTRICO

Considera un simple juego de apareamiento asimétrico en el cual una hembra (un Pájaro…), intenta mantener un macho para permanecer con él y ayudar a crear una familia en lugar de irse y propagar sus genes en cualquier otro lado. Una posible técnica para hacerlo es insistir en un largo y arduo cortejo antes de aparearse. Suponer que una hembra puede ser tímida (insistir en un cortejo) o rápida (estar dispuesta a aparearse con cualquiera de su especie), y un macho puede ser cualquiera de las dos características: fiel (pasar por un cortejo y luego ayudar a criar a los bebes) o infiel (no estar dispuesto a pasar por un cortejo, y abandonar a cualquier hembra después del apareamiento). Suponer que los pagos de cada padre de los bebés es +15 y, el total de costos por criar bebés es de -20, los cuales pueden ser divididos igualmente entre ambos padres, o caer enteramente en la hembra si el macho la abandona. Suponer que el costo de un largo cortejo es -3 para cada jugador (Dawkins, 1976).

		Macho	
		Fiel	Infiel
Hembra	Tímida	(2, 2)	(0, 0)
	Rápida	(5, 5)	(-5, 15)

i. Demostrar que no hay un equilibrio en EP.

ii. Encontrar una EM ESS (estrategia estable evolutivamente) para el macho (sería una en la cual iguala los pagos esperados de “Tímida” y “Rápida”).

iii. Similarmente, encontrar una ESS para la hembra.

iv. Si los machos y las hembras siguen esas ESS, ¿Cuales serían los pagos esperados?

Solución al ejercicio # 2 b.

		j: C	j: D	Min	
i	A	2, 5	3, -1	2	← Max Min
	B	-2, 0	5, 3	-2	
	Max	2	5		

↑ Min Max

I. Maxi-Min: (Jugador ***i***)

[*i* quiere maximizar su ganancia; *j* minimizar su ganancia de *i*]

Si *i* selecciona A, la S_j que minimiza la ganancia *i* es C (ganancia = 2)

Si *i* selecciona B, la S_j que minimiza la ganancia *i* es C (ganancia = -2)

i quiere maximizar su ganancia. Si juega A la peor ganancia es 2; si juega B la peor ganancia es -2

Entonces *i* elige A (el mayor valor); así $v_i = 2$; $(S_i, S_j) = (A,C)$

II. Mini-Max: (Jugador ***i***)

Si *j* Juega C, la S_i que maximiza la ganancia *i* es A (ganancia = 2)

Si *j* Juega D, la S_i que maximiza la ganancia *i* es B (ganancia = 5)

j quiere minimizar la ganancia *i*. Si juega C la mejor ganancia es 2; si juega D la mejor ganancia es 5

Entonces *j* elige C (el menor valor); así $v_i = 2$; $(S_i, S_j) = (A, C)$

III. Mini-Max: (Jugador ***j***)

Si *i* Juega A, la S_j que maximiza la ganancia *j* es C (ganancia = 5)

Si *i* Juega B, la S_j que maximiza la ganancia *j* es C (ganancia = 0)

i quiere minimizar la ganancia de *j*. Si juega A la mejor ganancia es 5; si juega B la mejor ganancia es 0

Entonces *i* elige B (el menor valor); así $v_j = 0$; (Si, Sj) = (B, C)

		j: C	j: D	Max	
i	A	2, 5	3, -1	2	← Min Max
	B	-2, 0	5, 3	0	
	Min	0	-3		

↑ Max Min

IV. Maxi-Min

Si *j* Juega C, la S_i que minimiza la ganancia *j* es B (ganancia = 0)

Si *j* Juega D, la S_i que minimiza la ganancia *j* es B (ganancia = -3)

j quiere maximizar su ganancia. Si juega C la menor ganancia es 0; si juega D la menor ganancia es -3

Entonces *j* elige C (el mayor valor); así $v_j = 0$; el perfil $(S_i,S_j) = (B,C)$

Así $v_i \neq v_j$.

Solución: al ejercicio #8 (La Pesca Jamaícana)

		Corriente	
		Marcha	No marcha
Pescador	Inside	17.3	11.5
	Outside	-4.4	20.6
	In-Out	5.2	17.0

Puede observarse que no existe un PSM, no hay dominancia.

Los pagos son un promedio de los beneficios en libras por mes de pesca del capitán de la canoa del pescador. Este caso se puede tratar como un juego de 3x2 (mx2). Al graficar el juego se observará que el punto más bajo de la posición superior de la gráfica implica a las estrategias *inside* e *in-out*. Ahora se resuelve el juego 2x2:

		Corriente	
		M	NM
Pescador	Inside	17.3	11.5
	In-Out	5.2	17.0
		31%	69%

Diferencias en fila:

17.3 – 11.5 = 5.8 $\qquad \dfrac{11.8}{17.6} = 67\%$

5.2 – 17 = 11.8 $\qquad \dfrac{5.8}{17.6} = 33\%$

Las diferencias en columna resultan en 31% y 69%

i. ¿Valor del Juego? Valor esperado para *inside*. Pescador $\Longrightarrow$ Inside: (17.3)(0.31) + (11.5)(0.69) = 13.3.

ii. Así obtenemos una estrategia óptima del 67% para *inside*; 33% para *in-out* del pescador; una estrategia óptima para la corriente *Marcha* del 31% y un 69% para la corriente *No marcha*; y un valor del juego de 13.3.

iii. ¿Cómo se compara la solución del juego con el comportamiento de los aldeanos? ¿Por qué no utilizan *outside*? Los pescadores (capitán) no siguen la estrategia *outside*; ya que se caracteriza como arriesgada.

iv. ¿Cuál es la conclusión de este juego? Esta sociedad se ha adaptado a su ambiente natural y económico.

v. ¿En su opinión, cuál es la falla de este juego? Según Kozelka (1969) hay una falla en el análisis, ya que los oponentes de los pescadores es un fenómeno natural “la corriente”, y no es una entidad razonable, y su comportamiento no es afectado.

vi. ¿Qué pasa si los pescadores utilizan una EM del 25% en la estrategia *Marcha*? Calcular el valor esperado de sus diversas estrategias.

   Inside: (0.25)(17.3) + (0.75)(11.5) = 12.95

   Outside: (0.25)(-4.4) + (0.75)(20.6) = 14.35

   In-out: (0.25)(5.2) + (0.75)(17.0) = 14.05

   Según estos datos, los pescadores deberían pescar *outside*.

vii. Suponer que en un año la corriente corra un 35% del tiempo: ¿Cuáles serán los pagos esperados?

   Inside: (0.35)(17.3) + (0.65)(11.5) = 13.53

Outside: (0.35)(17.3) + (0.65)(11.5) = 11.85

In-out: (0.35)(17.3) + (0.65)(11.5) = 12.87

viii. ¿Qué significa el valor del juego 13.3 encontrado inicialmente, desde la perspectiva del Minimax? La solución del juego (ventaja) a través del Minimax es que les garantiza un ingreso promedio de al menos 13.3% libras/canoa por mes, sin tener en cuenta de lo que ocurre con la corriente (es una propiedad de seguridad que da la solución Minimax, incluso cuando el oponente no es una entidad razonable).

¿Cuál sería el % para el cual la estrategia *in-out* sería la mejor respuesta?

	(q) M	*(1-q)* NM
(p) Inside	17.3	11.5
(1-p) In-Out	5.2	17.0

$$17.3q + (1 - q)(11.5) < 5.2q + (1 - q)(17)$$
$$5.8q + 11.5 < 17 - 11.8q$$
$$17.6q < 5.5$$
$$q < 0.31$$

Si q = 0.30

Inside: (0.30) (17.3) + (0.70) (11.5) = 5.19 + 8.05 = 13.24

Outside: (0.30) (-4.4) + (0.70) (20.6) = -1.36 + 14.42 = 13.1

In-out: (0.30) (5.2) + (0.70) (17.0) = 1.56 + 11.9 = 13.46

Suponer que *in-out* en "NM" fuera de 15 en lugar de 17. ¿Cuál sería el efecto en la solución del juego sobre el valor del juego? Encontrando el valor del juego para *in-out*.

In-Out: (5.2)(0.22) + (15)(0.78) = 1.144 + 11.7 = 12.84

Se tiene una disminución del 3.5% respecto al valor del juego original.

Una reducción en el ingreso promedio por libras/canoa/mes.

V
Juegos en forma extensiva

En el otoño de 1998 los espectadores tuvieron una opción de películas animadas para escoger. Curiosamente dos de las películas fueron de insectos: Disney Studio´s “A Bug´s Life” y “DreamWorks SKG´S Antz”. Alguna audiencia, maravillada de las películas animadas por computadoras, estuvo expectante de la rivalidad que conllevó a las dos películas gemelas a una alta competencia.

Los ejecutivos de Disney ponderaron la idea de una película de bichos, animada en los finales de los años 80, durante el periodo de Jeffrey Katzenberg a cargo de los estudios de la Compañía. Sin embargo, “A Bug´s Life” no fue concebida hasta después que Katzenberg dejó la empresa Disney por desacuerdos con sus directivos. En agosto de 1994, poco después, Pixar Animation, una empresa de animación de películas por computadoras, se inclinó por “A Bug´s Life” para Disney, donde Michael Eisner, el sustituto de Katzenberg, aceptó la propuesta y la película entró en producción.

Aproximadamente al mismo tiempo, Katzenberg se juntó con Steven Spielberg y David Geffen para formar DreamWorks SKG, un nuevo estudio con grandes expectativas; poco tiempo después SKG se unió con una firma de animación por computadora, llamada PDI para producir “Antz”.

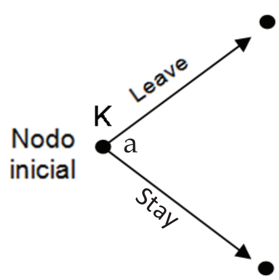
Disney eligió liberar a “A Bug´s Life” en la temporada del “Día de Gracias”, cuando la película “Prince of Egypt,” de SKG, fue originalmente programada para abrirse en las salas de cine. En respuesta, SKG decidió retrasar la liberación de “Prince of Egypt” hasta la temporada de Navidad y se apresuraron a completar “Antz”, de manera que pudiera estar lista antes de “A Bug´s Life” y reclamar el título de la “Primer película animada de Bichos”.

Esta historia es intrigante por las características, más allá de los personajes, los temas legales (¿Katzenberg robó la idea de Bichos de Disney?) y la complicada estrategia de negocios. Katzenberg abandonó Disney por la falta de pago de bonos.

Usemos un modelo matemático para contar la historia de la película de bichos, focalicemos en la competencia entre las dos películas. Pensar en un juego entre Katzenberg y Eisner, quienes son los jugadores de nuestro modelo. Podemos usar un árbol para representar gráficamente la interacción de estrategias entre estas dos personas. El árbol es definido por nodos y ramas. Los nodos representan el lugar donde algo sucede en el juego (tal como una decisión de uno de los jugadores) y las ramas indican las acciones varias que los jugadores pueden escoger. Representaremos los nodos por sólidos círculos y las ramas por flechas conectando los nodos. Un apropiado árbol construido es llamado una representación en forma extensiva.

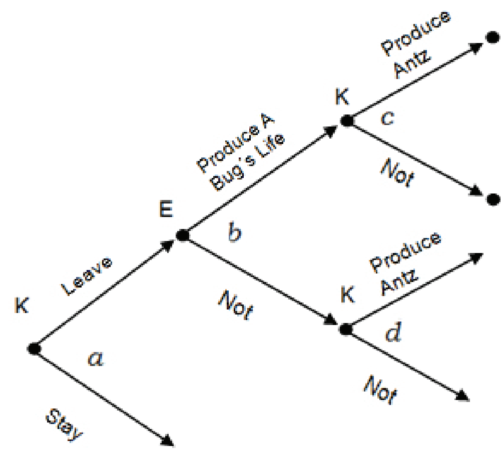
Para diseñar el árbol del juego para Katzenberg – Eisner es útil pensar en la secuencia cronológica de eventos que describen la historia.

Permitir que el juego comience con la decisión de Katzenberg acerca de dejar o no a Disney. El nodo *a* significa el lugar donde esta decisión es realizada. Esta decisión es el inicio del juego; *a* es llamado nodo inicial. Cada juego en forma extensiva tiene exactamente un nodo inicial.



Katzenberg tiene dos opciones: - permanecer (stay) o abandonar (leave), corresponde a las dos ramas, las cuales son graficadas como flechas desde el nodo *a* y etiquetadas. Esas ramas dirigen desde el nodo *a* hacia otros dos nodos.

Si Katzenberg decide permanecer en Disney se asume que el juego termine. De otra manera, si Katzenberg abandona, entonces otra decisión tiene que hacerse. Primero, Eisner debe decidir si produce “A Bug´s Life”.



La figura muestra cómo el árbol es expandido para incluir la escogencia de Eisner. Notar que Eisner ha hecho esta decisión solamente si Katzenberg ha dejado a Disney, el movimiento de Eisner ocurre en el nodo *b*. Las dos opciones de Eisner – producir “A Bug´s Life” o no producirla – son representadas por dos ramas, que se dirigen desde el nodo ***b*** a dos otros nodos, *c* y *d*.

Ahora Katzenberg debe escoger si produce Antz. La decisión de Katzenberg toma lugar en ambos, nodos *c* o nodo *d*, dependiendo de que si Eisner ha seleccionado producir o no.

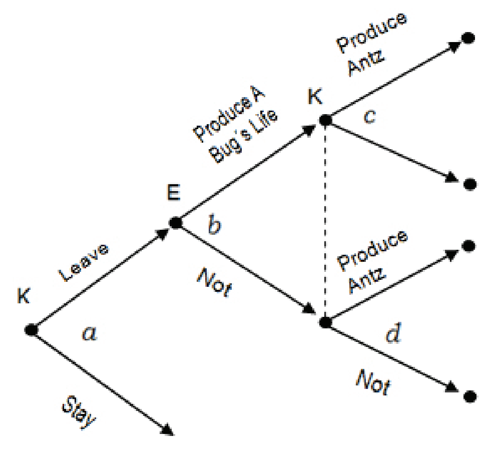
Notar que hay dos ramas desde el nodo *c* y otras dos en el nodo *d*. Observar que el inicio de Katzenberg está localizado en *c* y en *d* porque él está en movimiento en esos nodos.

A este punto hemos llegado a un asunto crítico: La información ¿En el árbol se especifica apropiadamente la información de los jugadores cuando ellos toman las decisiones?

Con la forma extensiva podemos representar la información de los jugadores para describir si ellos saben dónde están en el árbol y los progresos del juego. Por ejemplo, cuando Katzenberg decide si permanecer o dejar, él sabe que está haciendo el primer movimiento en el juego. En otras palabras, en el nodo *a* Katzenberg sabe que está en el nodo *a*; además, porque Eisner observa si Katzenberg permanece o abandona, cuando Eisner ha decidido si producir "A Bug´s Life", él sabe que está en el nodo *b*.

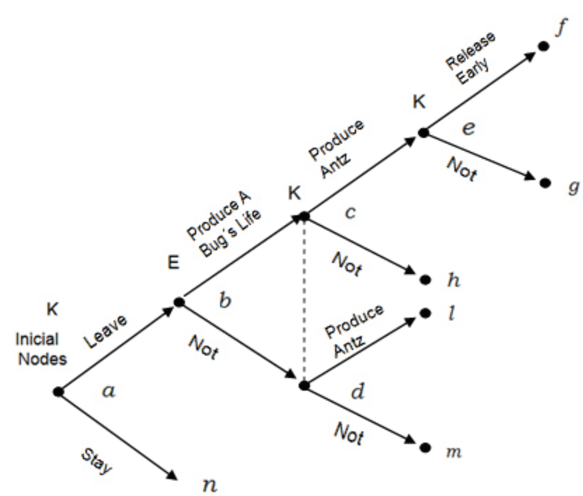
Sin embargo, como la historia lo indica, cada jugador tiene que seleccionar entre producir y no producir sin conocer si el otro jugador ha decidido producir. En particular, Katzenberg debe escoger si produce "Antz", antes de conocer si Eisner está produciendo "A Bug´s Life". Los jugadores conocen acerca de cada una de las opciones de los otros, solamente después que ambos lo hacen.

Katzenberg no tiene información, él no puede distinguir entre los nodos *c* y *d* (existe falta de información); él sabe que está en uno de esos nodos, pero él no sabe en cuál de ellos está. Para ello se traza una línea (punteada) para capturar esta falta de información, entre los nodos *c* y *d* (se etiqueta solamente uno de ellos con la letra inicial de Katzenberg).



Asumir que, si cada uno o ambos jugadores escoge no producir su película propuesta, entonces el juego termina. Si ambos jugadores optan por producir, entonces una o más decisiones tiene que ser realizada por Katzenberg. Si libera "Antz" tempranamente (para superar el éxito de la película "A Bug´s Life" en los salas de cine).

Agregando esta decisión al árbol con pagos, Katzenberg hace esta escogencia en el nodo *e*, después de conocer que Eisner disidió producir "A Bug´s Life".



El árbol representa las diferentes acciones de los jugadores y la información en el juego. Los nodos *a, b, c, d, e,* son llamados nodos de decisión.

Los nodos *f, g, h, l, m, n,* son llamados nodos terminales y representan los pagos o resultados del juego – los lugares donde el juego termina-. Cada nodo terminal también corresponde a una única ruta a través del árbol, el cual es un camino de obtener desde el nodo inicial a través del árbol, siguiendo las ramas en la dirección de las flechas.

En una forma extensiva hay una relación, una-a-una entre la ruta y los nodos terminales.

Es común utilizar el término "conjunto de información" para especificar la información de los jugadores en los nodos de decisión en el juego.

Un conjunto de información describe cuál nodo de decisión es conectado a cada otro por líneas punteadas (significando que un jugador no puede distinguir entre ellas).

Cada nodo de decisión es conectado a un conjunto de información. Algunos conjuntos de información consisten de solamente un nodo: Por ejemplo, el conjunto de información del nodo *a* comprende solo este nodo (Katzenberg puede distinguir este nodo de sus otros nodos de decisiones).

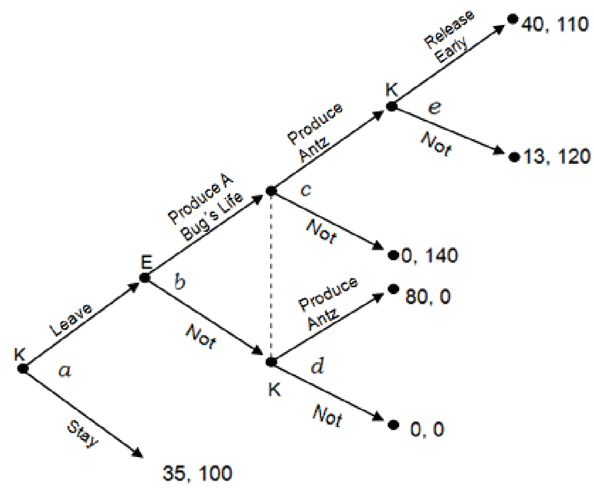
El nodo *c* y *e* también son sus conjuntos de información separada. Los nodos *c* y *d*, sin embargo, están en el mismo conjunto de información.

El conjunto de información en un juego precisamente describe las diferentes decisiones que los jugadores tienen que hacer. Por ejemplo Katzenberg tiene 3 decisiones que hacer en el juego: Uno en el conjunto de información dado en el nodo *a*; otro, en el conjunto de información contenido en los nodos *c* y *d*; y el tercer conjunto de información es dado en el nodo *e*. Eisner tiene una decisión que hacer (en el nodo *b*). Recordar que solamente una decisión es hecha en cada conjunto de información.

Por ejemplo, porque los nodos *c* y *d* están en el mismo conjunto de información, Katzenberg hace la misma elección en *c*, tanto como en *d* (producir o no). Asumimos que todos los nodos en un conjunto de información son nodos de decisión para el mismo jugador.

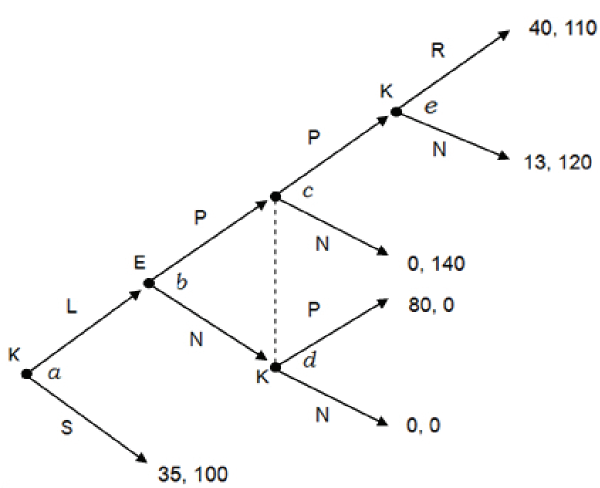
La figura anterior muestra los elementos de un juego. ¿Las preferencias bajo resultados o ganancias, pagos o utilidades? ¿Katzenberg preferiría finalizar el juego en *f* que en el nodo *l*?

Recordar que los pagos mayores significan los resultados preferidos. Katzenberg y Eisner probablemente quieren maximizar sus ganancias monetarias individuales. Entonces, definamos los pagos como beneficios que cada uno obtiene en varios resultados. Las ganancias en un nodo es un vector de pagos. Por ejemplo, en el nodo *n*, (35, 100) significa 35 para Katzenberg y 100 para Eisner.



Se utiliza la convención de que uno de los pagos de los jugadores son primeramente listados, porque Katzenberg es el primer jugador a mover en el juego.

Una representación más compacta se presenta a continuación:



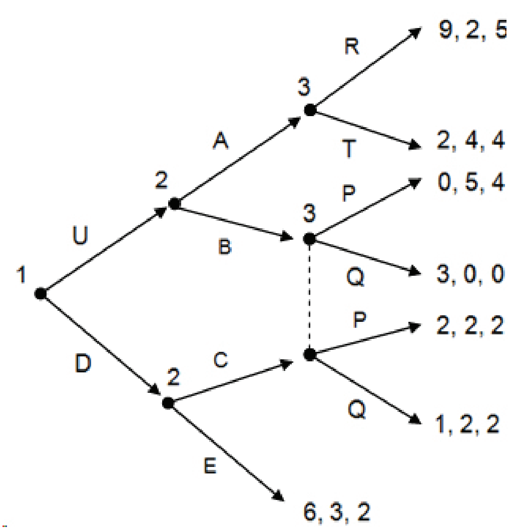
La Forma Extensiva completa del juego Katzenberg-Eisner representa todos los elementos estratégicos.

1. Lista de jugadores.
2. Descripción completa de lo que los jugadores pueden hacer (sus posibles acciones).
3. Una descripción de lo que los jugadores saben cuándo ellos actúan.
4. Una especificación de cómo las acciones de los jugadores lideran los resultados.
5. Una especificación de las preferencias de los jugadores bajo sus resultados.

Otros ejemplos.

Identificar el conjunto de información de cada jugador y el conjunto de estrategias de los juegos siguientes, descritos en forma extensiva.

a)



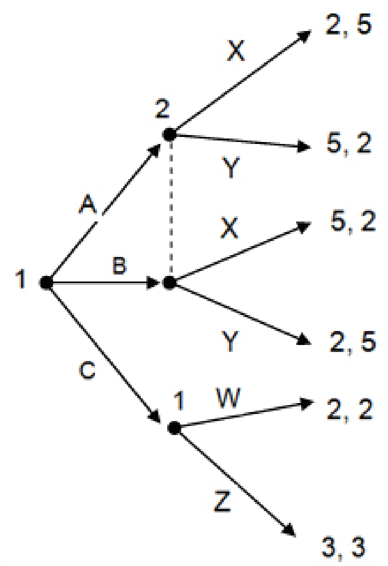
Solución:

$S_1 = \{U,D\}$

$S_2 = \{AC, AE, BD, BE\}$

$S_3 = \{RP, RQ, TP, TQ\}$

b)



Solución:

$S_1 = \{AW, BW, CW, AZ, BZ, CZ\}$

$S_2 = \{X,Y\}$

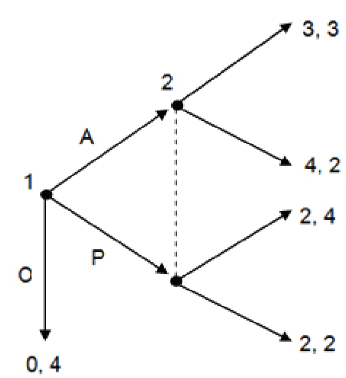
c) Una empresa puede o no salir de una industria competitiva:

A $\rightarrow$ ser agresivo en el mercado (Empresa 1).

P $\rightarrow$ ser pasivo…

O $\rightarrow$ dejar el mercado. Entonces la empresa 2 disfruta el monopolio.

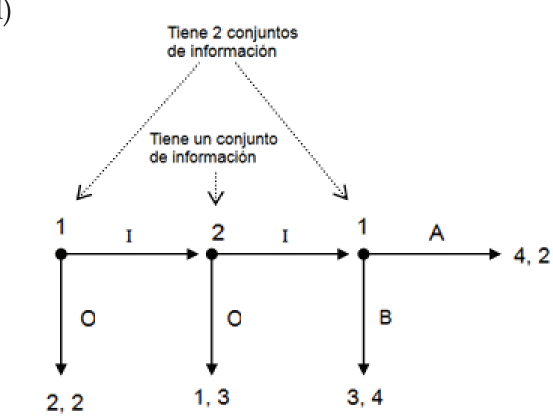
Cuando E2 toma su decisión, sabe solamente si E1 está en el mercado o fuera de él. La E2 no observa a E1.



$S_1 = \{A,P,O\}$

$S_2 = \{A,P\}$

d)



¿Cuál es el conjunto de estrategias?

$S_1 = \{0A, 0B, IA, IB\}$

$S_2 = \{0, I\}$

$$\begin{array}{cc} A & B \\ \begin{Bmatrix} O \\ I \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \end{array} \Rightarrow A \times B = \{OA, OB, IA, IB\}$$

Espacio de estrategias

$S = \{(OA,O), (OA, I), (OB, O)...\}$

Cada perfil de estrategias $\Longrightarrow$ un vector de pagos:

$u_1 = (OA,O) = 2$

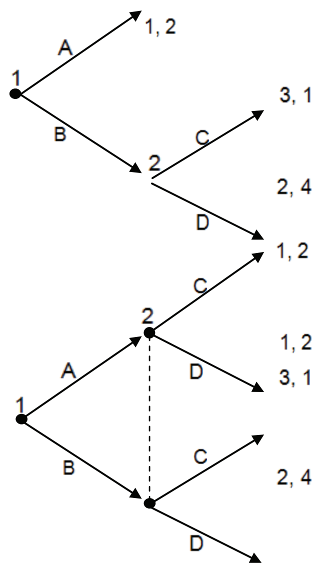
$u_2 = (IA,O) = 3$

5.1 Conversión de un juego de forma normal a forma extensiva

¿Existe un procedimiento para convertir un juego en forma normal a una forma extensiva? La conversión no es tan sencilla. Aunque puede haber una sola manera de ir de la forma extensiva a la forma normal; lo inverso no es cierto.

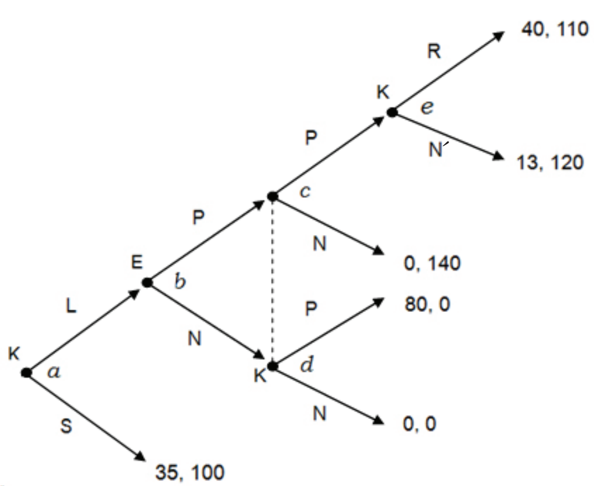
		J2	
		C	D
J1	A	1, 2	1, 2
	B	3, 1	2, 4

Observar que las siguientes formas extensivas tienen diferentes estructuras de información. En la primera, el J2 sabe que el J1 no selecciona *A* cuando el J2 tiene que decidir entre *C* y *D*. En el segundo, el J2 no tiene tal información.



Tienen diferentes estructuras de información.

Ejemplo: Dado el siguiente juego en forma extensiva (el juego Katzenberg – Eisner), describir el espacio de estrategias y dibujar la representación en forma normal.



Se puede observar que el Jugador K tiene 3 conjuntos de información. En el primer conjunto de información selecciona entre *L* y *S*. En el segundo conjunto de información, él escoge entre *P* y *N*, y en su tercer conjunto de información él selecciona entre *R* y *N′*. Así una estrategia para K es una combinación de tres acciones: una para cada conjunto de información. Por ejemplo, una estrategia es *LNR*, la cual es una estrategia utilizable a considerar porque ilustra, incluso, si el Jugador K selecciona *N* en su segundo conjunto de información; su estrategia debe describir lo que él haría en su tercer conjunto de información. Dado que el Jugador K tiene dos alternativas en cada uno de los tres conjuntos de información, hay 2 x 2 x 2 = 8 diferentes combinaciones (8 diferentes estrategias), así

$S_k = \{LPR, LPN', LNR, LNN', SPR, SPN', SNR, SNN'\}$

Observar que el Jugador E tiene solamente un conjunto de información y su espacio de estrategia es: SE = {P, N}.

Para dibujar la matriz en forma normal, primero observar que debemos tener 8 filas (para 8 diferentes estrategias para K) y dos columnas (para las dos estrategias del Jugador E).

Observar que en cada perfil de estrategia individual se puede trazar a través de la forma extensiva para encontrar el vector de pagos asociado. Por ejemplo, considerar el perfil de estrategia (LNN′, P). Con este perfil de estrategia se juegan los ingresos desde el nodo inicial hacia el nodo *b*, luego el nodo *c* y finaliza en el nodo terminal con un vector de pago (0, 140).

A continuación se completa la matriz.

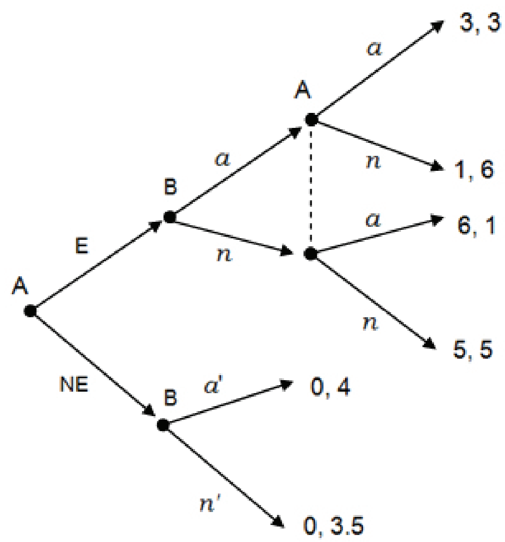
		E	
		P	N
K	LPR	40, 110	80, 0
	LPN′	13, 120	80, 0
	LNR	0, 140	0, 0
	LNN′	0, 140	0, 0
	SPR	35, 100	35, 100
	SPN′	35, 100	35, 100
	SNR	35, 100	35, 100
	SNN′	35, 100	35, 100

5.2 Ejercicios y aplicaciones

1. Representar el siguiente juego en forma extensiva. La firma A decide si entra a la industria de la firma B. La firma B observa esta decisión. Si la firma A entra, entonces las dos firmas deciden simultáneamente si lo anuncian. De otra forma, la firma B decide unilateralmente si lo anuncia. Con dos firmas en el mercado, las firmas ganan un beneficio de $3 millones cada una, si ambas anuncian; y $5 millones si ambas no lo anuncian. Si solamente una firma lo anuncia, entonces gana $6 millones y la otra gana $1millon. Cuando la firma B esta solitaria en la industria, su ganancia es de $4 millones si se anuncia, y de $3.5 millones si no se anuncia. La firma A no gana nada si no entra.
2. Janet es una concursante de un juego popular y su tarea es adivinar detrás de cuál puerta esta Liz, otra concursante que está de pie. Con Janet fuera del cuarto, Liz escoge una puerta detrás de la cual pararse – cualquier puerta A o B. El anfitrión, Juan, observa esta selección. Janet no ha observado la selección de Liz, entonces entra al cuarto. Juan le dice a Janet cualquiera de los dos: “Rojo” o “Verde”. Después de escuchar la oración de Juan, Janet levanta una puerta (ella dice cualquiera de las dos: “A” o “B”). Si ella levanta la puerta correcta, entonces ella gana $100. Si ella levanta la puerta equivocada entonces no gana nada. Liz gana $100 si Janet levanta la puerta errónea, y no gana nada si ella levanta la puerta correcta (así Liz le gustaría ocultarse de Janet, y a Janet le gustaría encontrar a Liz). A Juan le gusta la letra A. Si Janet selecciona la puerta A, entonces esta selección hace feliz a Juan, para acordar 10 unidades de utilidad. Si ella selecciona la puerta B, entonces Juan recibe 0 utilidades.

Solución al ejercicio 1:

Sea E y NE la notación de la firma A para entrar y no entrar a la industria de la firma B. Sea *a* (advertise) y *n* colocar publicidad y no publicidad, respectivamente. Entonces el siguiente diagrama en forma extensiva representa el conjunto de estrategias.

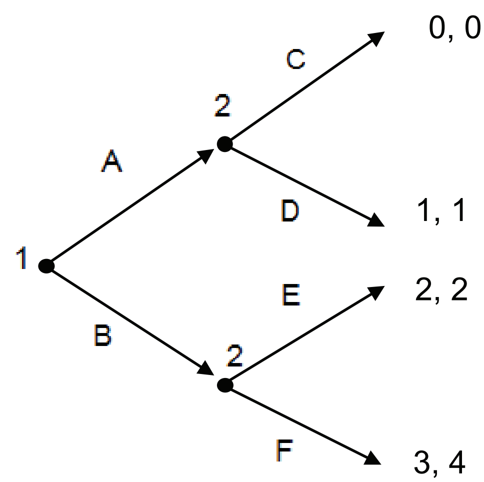


Notar que la decisión de anunciar simultáneamente son capturadas suponiendo que en el segundo conjunto de información de la firma A, la firma A no sabe si la firma B escogerá *a* o *n*. También notar que los apóstrofos (‘) son usados en las etiquetas de acción en el conjunto de información más bajo de la firma B para diferenciarla de las acciones tomadas en el conjunto de información de B (en la parte superior).

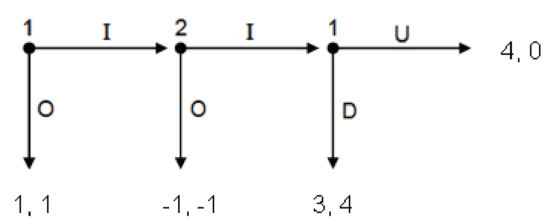
3. Hay una industria en la cual 2 firmas compiten de la forma siguiente: primero, la firma1 decide si fija un precio alto (H) o un precio bajo (L). Después viendo el precio de la firma1, la firma2 decide si fija un precio alto (H) o un precio bajo (L). Si ambas firmas seleccionan el precio bajo, entonces el juego termina con no más interacción. Si cualquiera de las dos o ambas firmas seleccionaron el precio alto, entonces el apoderado general decide si procesar/enjuiciar (P) o no hacerlo (N) por el comportamiento anticompetitivo. En este caso, el apoderado general no observa cuál firma seleccionó el precio alto (o si ambas firmas seleccionaron el precio alto). Dibujar la forma extensiva del juego, asignar tus propios pagos (vector de pagos).

4. Dibujar la matriz en forma normal de cada uno de los siguientes juegos en forma extensiva.

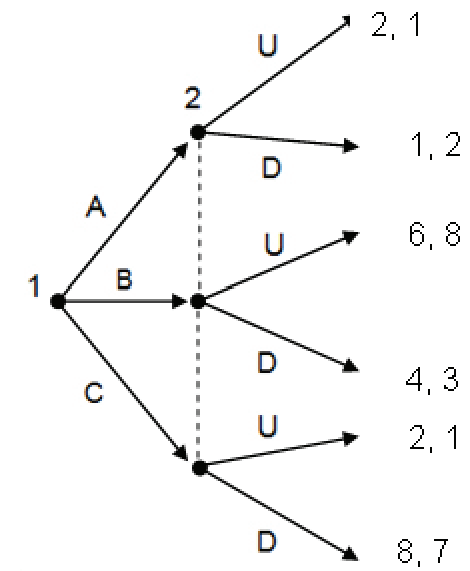
a)



b)



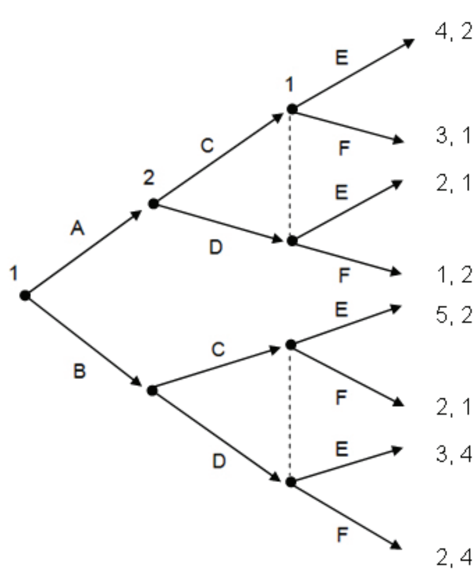
c)



5. Considerar el juego en forma normal siguiente. Dibujar una representación del juego en forma extensiva.

		J2	
		C	D
J1	AY	0, 3	0, 0
	AN	2, 0	-1, 0
	BY	0, 1	1, 1
	BN	0, 1	1, 1

6. Convertir el árbol del juego en forma extensiva a una forma normal y verificar si existen EN.



5.3 Juegos dinámicos con información completa

Antes hemos estudiado juegos con movimientos simultáneos. Los jugadores, una vez finalizan el juego nunca más interactúan.

En la vida real la mayoría de interacciones no es de este tipo, es posible que cuando un jugador actúe ya conozca la decisión de otro, o que uno o más jugadores actúan más de una vez. Ejemplo: dos empresas en un oligopolio, no solo fijan precios hoy, saben que también tendrán que fijar precios en el futuro, y al decidir si bajan el precio hoy para ganarle la cuota del mercado a su rival, toman en cuenta la posible reacción del rival en el futuro (un Gobierno que impone aranceles a las importaciones,…).

En este tipo de juegos veremos que el EN sigue siendo válido en este tipo de juegos; sin embargo, hay una idea que no pude recoger y es esencial en este tipo de juegos: la credibilidad (ejemplo: la farmacia en un pueblo, que es única – monopolio).

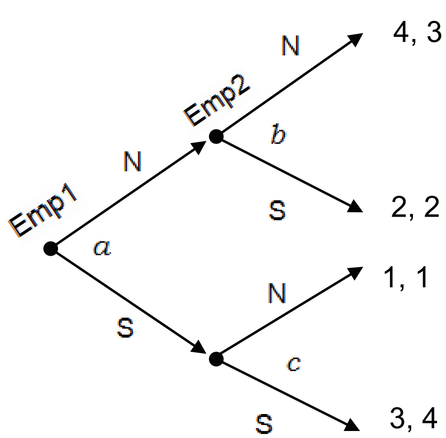
Ejemplo: UBICACIÓN DE UN CENTRO DE INVESTIGACIÓN

- Dos empresas deben decidir si establecer sus centros de investigación y desarrollo con el Norte o en el Sur. A las dos empresas les conviene elegir la misma zona porque esto facilitará su comunicación y reducirá costos; pero la Empresa 1 prefiere el Norte y la Empresa 2 prefiere el Sur, lo cual las lleva a una situación familiar a la de la Batalla de los Sexos. Si cada empresa toma su decisión sin conocer la decisión de la otra, la representación matricial es la siguiente:

		Emp2	
		N	**S**
Emp1	**N**	4, 3	2, 2
	S	1, 1	3, 4

Puede observase que existen dos Equilibrios de Nash en EP, que las dos empresas se establezcan en el Norte, y que ambas se establezcan en el Sur.

- Consideremos el caso en el que la interacción entre las empresas se da en forma secuencial. La Empresa 1 establece su centro primero. Luego la Empresa 2 toma su decisión (después de haber observado la localización elegida por Empresa 1).

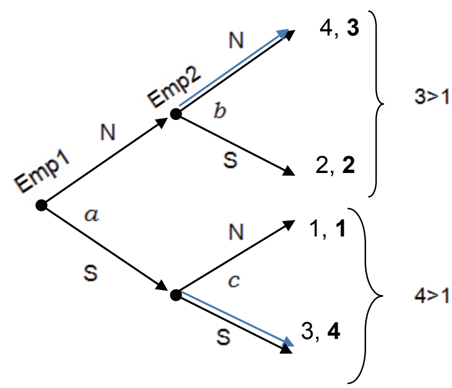


En este tipo de juegos la Empresa 2 no tendrá que hacer conjeturas sobre lo que hará la Empresa 1, lo sabrá con seguridad.

5.4 Inducción hacia atrás

- Se inicia por el final del juego para identificar acciones óptimas. Se analiza la decisión óptima de la Empresa 2 si le toca jugar en el nodo *b*, así, le conviene elegir Norte, pues obtiene 3 en lugar de 2. De la misma forma, encontramos que en el nodo *c*, a la Empresa 2 le conviene elegir Sur (que le proporciona 4 en lugar de 1).

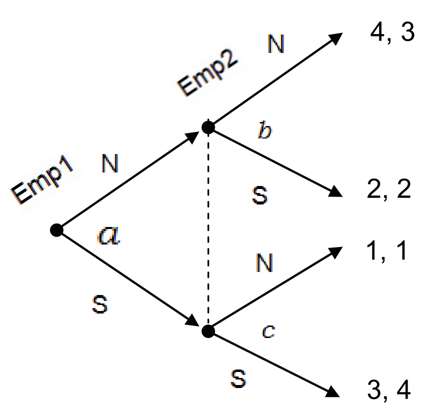
  ⟹ Marcamos en el árbol las acciones óptimas para la Empresa 2.



La Empresa 1 puede anticipar qué acción le convendrá tomar a la Empresa 2 en cada caso; sabe que si el elige Norte, la Empresa 2 también lo hará (N,N), y si elige Sur, la Empresa 2 también elegirá Sur (S,S). Es decir, la Empresa 1 anticipa que si elige Norte se llegará a los pagos (4,3); mientras que elegir Sur conducirá a los pagos (3,4). Así, la Empresa 1 se enfrenta a una decisión, pues evidentemente le conviene elegir Norte. Así, el procedimiento de inducción hacia atrás dicta que el resultado de la interacción es que las dos empresas se ubicarán en el Norte.

Observar que a diferencia de la interacción simultánea (Donde habían 2 EN, y lo único que podíamos predecir es que se ubicarían en el mismo sitio); en la interacción secuencial resulta que la empresa que elige primero "se sale con la suya", se ubica en su lugar preferido, anticipando que la segunda empresa hará lo mismo porque es lo que le convendrá.

En el siguiente diagrama se puede representar una situación en que las empresas 1 y 2 eligen simultáneamente su ubicación (ver línea punteada).



Esto indicaría que cuando la Empresa 2 está en el nodo *b* o en *c*, no sabe en cuál de los dos está, así, se dice que los nodos *b* y *c* pertenecen al mismo conjunto de información de la Empesa 2; significa que el jugador que mueve en ella no sabe en cuál de ellos esta.

El diagrama sin la línea punteada describe que la Empesa 1 elige entre N y S, luego la Empesa 2, conociendo la decisión de la Empesa 1, elige entre N y S; los pagos que obtienen las empresas dependen de la combinación de acciones de las dos empresas.

El gráfico con la línea punteada, representa un juego donde la Empesa 2, sin conocer la decisión de la Empesa 1, elige entre N y S.

5.5 Estrategias puras en juegos en forma extensiva

Definición 11:

Una EP para el jugador ***i*** en un juego en forma extensiva es un plan que indica que alternativa debe escoger el jugador ***i*** en cada uno de los conjuntos de información en que le puede tocar jugar.

En el juego anterior (los dos centros de investigación), observar que la Empresa 1 solamente juega en el nodo ***a***, entonces una EP tiene que especificar qué hacer en ese nodo, por lo que la Empresa 1 solo tiene 2 estrategias posibles (N o S).

La Empresa 2 puede jugar en dos conjuntos de información distintos, en el nodo ***b*** y en ***c***. Una estrategia debe indicar qué hacer si juega en ***b*** y qué hacer si juega en ***c***, así, en total tiene 4 estrategias posibles: {NN, NS, SN, SS}.

Convertir el juego en forma extensiva a un juego en forma normal (estratégica).

		Emp2			
		NN	**NS**	**SN**	**SS**
Emp1	**N**	4, 3	4, 3	2, 2	2, 2
	S	1, 1	3, 4	1, 1	3, 4

Una vez en el juego normal buscamos los EN y observamos que tiene 3: (4,3), (4,3), (3,4); (N, NN), (N, NS) y (S, SS), respectivamente.

¿Cuál es la relación que guardan estos equilibrios con el procedimiento de inducción hacia atrás?

El equilibrio (N, NS) corresponde al que habíamos obtenido con el procedimiento de inducción hacia atrás (la Empresa 2 elige N si la Empresa 1 se ubica en N, la Empresa 2 se ubica en el S si la Empresa 1 se ubica en S, así la Empresa 1 se ubica en el Norte).

La respuesta(S,SS) da un resultado distinto al obtenido por el método de inducción hacia atrás y es útil para explicar el concepto de credibilidad. Observar que dada la estrategia de la Empresa 1 de ubicarse en S, la estrategia de la Empresa 2 de ubicarse en S (pase lo que pase) es óptima, le proporciona el pago más alto posible, pero lo que planee hacer la Empresa 2 si la Empresa 1 se ubica en el Norte no influye sobre sus pagos, porque esta parte del plan nunca se tendrá que llevar a cabo. ¿Es creíble la parte del plan de la Empresa 2? Supongamos que la Empresa 1 se ubica en N, la Empresa 2 no se adherirá a la estrategia de la Empresa 1, pues obtendría 2 en lugar de 4. El plan de Empresa 2 de ubicarse en S si la Empresa 1 se ubica en N es óptimo solo cuando no se tiene que realizar, no le convendrá llevarlo en la práctica si de verdad la Empresa 1 se ubica en el N; así el equilibrio (S,SS) se elimina.

Asimismo, los (N,NN) y (N,NS) llevan a los mismos pagos, son equivalentes y también carecen de credibilidad; en efecto, en este equilibrio la estrategia de la Empresa 2 indica elegir N aunque la Empresa 1 se ubique en S, acción que no le convendrá llevar a cabo si la Empresa 1 se ubica en S.

Hemos visto que el Método de inducción hacia atrás no permite obtener todos los EN, pero sí el Equilibrio de Nash, que satisface una condición adicional: la credibilidad.

Definición 12:

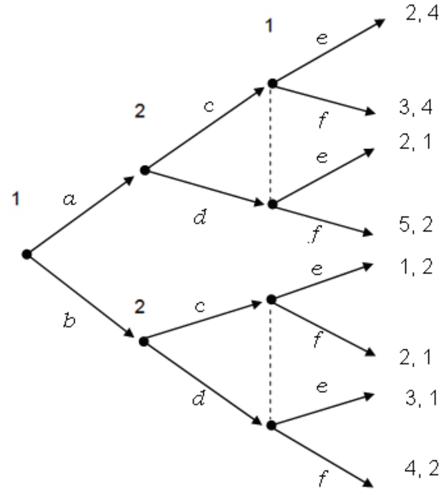
Un juego en forma extensiva tiene información perfecta si todo conjunto de información de cada jugador contiene un solo nodo.

- En un juego con información perfecta cada jugador distingue siempre en cual nodo está jugando (Ejemplo: las empresas con sus centros de investigación).
- Los jugadores, al final, pueden elegir la rama que les proporciona el pago más alto.
- Teorema de Zermelo: Todo juego finito en forma extensiva con información perfecta, tiene al menos un EN en EP.

5.6 Equilibrio perfecto en subjuegos

Supongamos un juego donde:

- El J1 elige entre las acciones *a* y *b*.
- Después de observar si J1 eligió *a* o *b*, el J2 elige entre *c* y *d*.
- Conociendo su propia elección anterior entre *a* o *b*, pero sin conocer la decisión del J2 entre *c* y *d*, el J1 elige entre las acciones *e* y *f*.



¿Cómo usar el método de Inducción hacia atrás? Cuando analizamos la decisión del J1 entre las acciones *e* y *f* al final del juego, vemos que no podemos asegurar cuál es la decisión óptima, porque depende del nodo concreto en el cual el J1 esté ubicado, y eso, el J1 no lo sabe.

Para generalizar el método de inducción hacia atrás necesitamos definir el concepto de subjuego.

Definición 13:

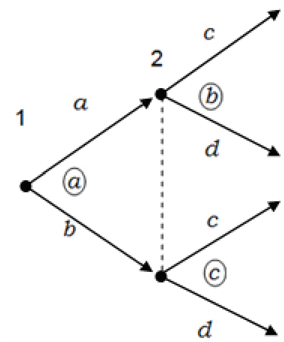
Un subjuego de un juego en forma extensiva es una parte del juego que comienza en un nodo t, incluye los nodos que son sucesores y excluye los que no lo son, y cumple las siguientes características:

1. El conjunto de información del nodo *t* contiene solo a *t*.
2. Si dos nodos pertenecen al mismo conjunto de información y uno de ellos está incluido en el subjuego, el otro también lo estará.

Un subjuego es una parte del juego original que podemos analizar aisladamente, respetando la información contenida en el juego completo.

Ejemplo:

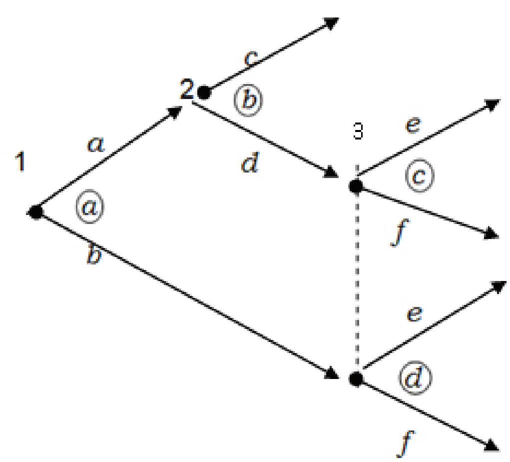
1. El J1 elige entre *a* y *b*.
2. Sin conocer la decisión del J1, el J2 elige entre *c* y *d*.



En este caso el único subjuego es el juego completo. No podemos separar el nodo *b* porque J2 sabría que J1 jugó *a* y no *b*, lo cual no se sabía en el juego original; además, el nodo *b* pertenece a un conjunto de información.

Consideremos el siguiente ejemplo:

1. El J1 elige entre acciones *a* y *b*.
2. Si el J1 elige *a*, el J2 elige entre acciones *c* y *d*.
3. Si el J1 elige *b* o si el J2 elige *d* después de J1 eligió *a*. El J3 eligió entre *e* y *f*. Cuando toma su decisión, el J3 no sabe si el J1 eligió *b* o si eligió *a* y J2 eligió *d*.



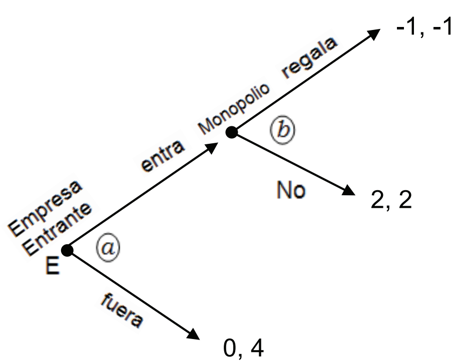
Nuevamente, el único subjuego es el juego mismo. Si retomamos parte del árbol que comienza en el nodo c, no se puede analizar aisladamente porque el J3 sabría que le toca jugar porque J1 jugó *a* y después el J2 jugó *d*, información que no se tenía en el juego original; además los dos nodos en que juega el J3 pertenecen al mismo conjunto de información (no se puede tener solamente un nodo).

Definición 14:

Un equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) de un juego en forma extensiva es un EN, que, además, proporciona un EN en cada subjuego del juego.

Ejemplo: "La farmacia única del pueblo".

La farmacia del pueblo ve amenazada su situación monopolítica por una empresa entrante potencial. Para evitar la entrada de la competencia disemina el rumor de que sí efectivamente se establece la nueva farmacia en represalia comenzará a vender la mercadería a mitad del costo. ¿Sería un error establecer la nueva farmacia en el pueblo?



		Monopolio	
		R	**NR**
Entrante	***e***	-1, -1	2, 2
	f	0, 4	0, 4

S_1 = *{Entra, Fuera}* ; S_2 = *{Regala, No Regala}*

Examinar primero los EN en el juego en forma normal, hay 2: (E,NR), (F,R). Para encontrar los equilibrios perfectos en subjuegos, observar que este juego tiene 2 subjuegos: El primero, el que inicia cuando el entrante potencial decide entrar y el monopolista debe decidir si "Regala la mercadería" – venderla a mitad de precio – o no hacerlo. El segundo subjuego es el juego entero mismo.

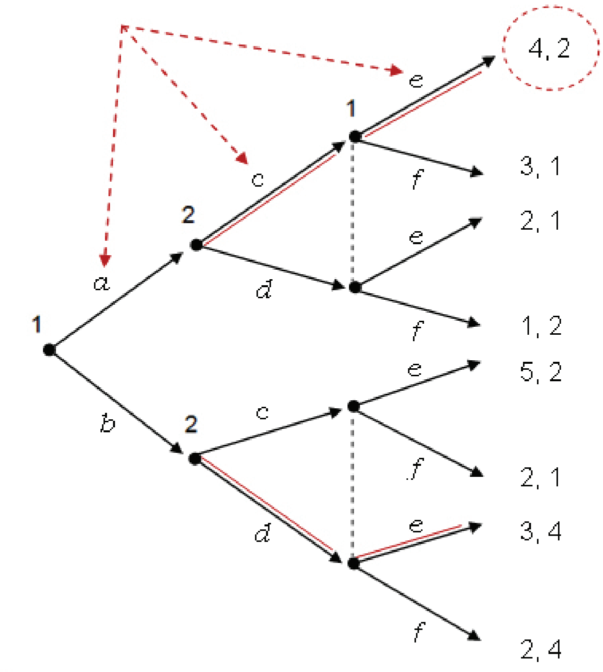
El primer subjuego

	Monopolista	
	R	**NR**
Entrante	-1, -1	2, 2

El único EN es que el monopolista no regalará la mercadería. Por tanto, de los dos EN que tiene el juego completo, solo el primero de ellos proporciona también un EN en el otro subjuego.

En cambio, el EN, en el cual el Entrante decide "No entrar", y el monopolista decide regalar, no proporciona un EN en el subjuego que comienza cuando el Entrante efectivamente entra. Es así como el concepto de Equilibrio Perfecto en subjuegos descarta este segundo EN por mantener una amenaza No Creíble.

Otro ejemplo: Retomar el juego siguiente y encontrar el EPS.



J1 *{a, b }; {e, f }; {e, f }*

{a, b } {ee, ef, fe, ff }

J2 *{c, d } {c, d } = {cc, cd, dc, dd }*

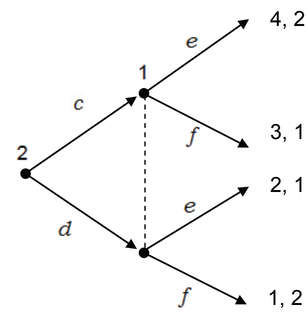
Este ejemplo refleja por qué el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) se puede ver como una generalización del proceso de inducción hacia atrás. Este juego tiene 3 subjuegos: el juego entero, el subjuego que inicia después de que el J1 elige *a* y el subjuego que inicia después de que J1 elige *b*.

Para encontrar el EPS podemos actuar de manera similar al procedimiento de inducción hacia atrás, iniciando nuestro análisis en el final del juego, pero buscando los subjuegos.

Consideremos el primer subjuego:

a) Cuando J1 elija *a*

$S_2 = \{c, d\}$; $S_1 = \{e, f\}$

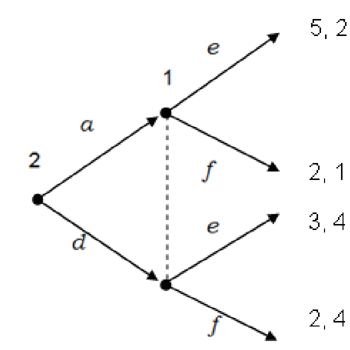


		J2	
		c	***d***
J1	*e*	4, 2	2, 1
	f	3, 1	1, 2

Se tiene un único NE, S^{ne} = *{(e,c)}*

b) Cuando J1 elija *b*

$S_2 = \{c, d\}$; $S_1 = \{e, f\}$



		J2	
		c	***d***
J1	*e*	5, 2	3, 4
	f	2, 1	2, 4

Se tiene un único NE, S^{ne} = *{(e,d)}*

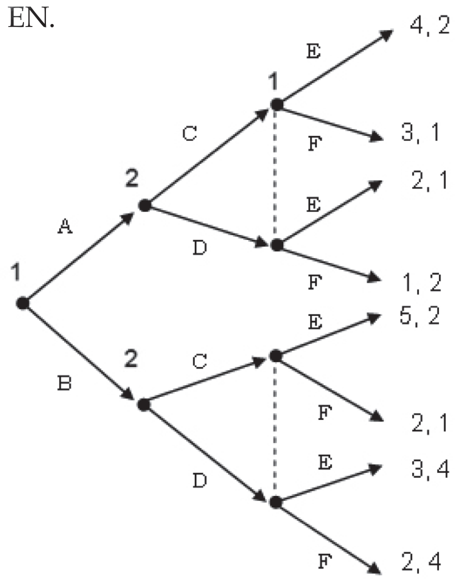
¿Cuáles ramas serán elegidas en cada uno de los dos últimos subjuegos?

Si J1 elige *a*, después se elegirán *c* y *e*. Si J1 elige *b*, después se elegirán *d* y *e*; esto se puede señalar en el árbol (ver una línea adicional en algunas ramas del árbol).

Así, el J1 concluye que si elige *a* le llevará a los pagos (4, 2) y, si elige *b* le llevará a los pagos (3, 4); de manera que, la decisión óptima del J1 será elegir *a*, con lo que obtendría 4 en lugar de 3.

¿Cuál es el resultado de juego?: El EPS consiste en que el J1 siga la estrategia que indica elegir *a* al principio y *e* en sus otros dos conjuntos de información, y el J2 siga la estrategia que indica elegir *c* si el J1 eligió *a*, y elegir *d* si el J1 eligió *b*. El resultado del juego en la ruta *ace*, el cual tiene asociado un pago de 4 para el J1 y un pago de 2 para el J2.

Ejercicio. Convertir el siguiente árbol en la forma normal (estratégica) y verificar si existen otros EN.



		J2			
		CC	**CD**	**DC**	**DD**
J1	AEE	4, 2	4, 2	2, 1	2, 1
	AEF	4, 2	4, 2	2, 1	2, 1
	AFE	3, 1	3, 1	1, 2	1, 2
	AFF	3, 1	3, 1	1, 2	1, 2
	BEE	5, 2	3, 4	5, 2	3, 4
	BEF	2, 1	2, 4	2, 1	2, 4
	BFE	5, 2	3, 4	5, 2	3, 4
	BFF	2, 1	2, 4	2, 1	2, 4

El jugador 1 tiene 3 conjuntos de información. Entonces hay 2x2x2 = 8 diferentes combinaciones (estrategias)

S_1 = {*AEE, AEF, AFE, AFF, BEE, BEF, BFE, BFF*}

Para el J2 se tienen 2 conjuntos de información.

S_2 = *{CC, CD, DC, DD}*

De la matriz se puede observar que se tienen 4 EN: (AEE, CD), (AEF, CD), (BEE, DD), (BFE, DD). De estos 4 equilibrios, solamente el primero es, además, un EPS. Significa que los otros 3 carecen de credibilidad (son redundantes, nos llevan por el mismo camino en el árbol del juego). Para el caso (2, 4) no es creíble que J2 elija *d* si J1 elige *a*. El único EN consiste en que J1 juegue *e* y J2 juegue *c*, y será la única que sobrevivaá la EIEED en este juego, pues a J1 le conviene más la acción *e* que la acción *f*, no importando lo que haga el J2.

El J2 se debe dar cuenta de que J1 elegirá *e* y que, por tanto, no le conviene elegir *d* si el J1 elige *a*. No es creíble que lo haga, por tanto, no son EPS.

Bibliografía

Cerdá, E., Pérez, J., Jimeno, J., (2004). Teoría de Juegos, Pearson Educación, Prentice Hall, Madrid, España.

Drew, F, Tirole, J (1991). Game Theory. The MIT Press, Cambridge Massachusetts, London England.

Gibbons, R.. (1992). A Primer in Game Theory. Prentice Hall-Financial Times.

Gibbons, R.. (1992). Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press, New Jersey.

Grinblatt, T.(2002). Financial Markets and Corporate Strategy, 2a edición, The McGraw-Hill Companies.

Hernández, J., (2002), Teoría de Juegos: su aplicación en economía, México, El Colegio de México, Centro de Estudios Económicos.

Straffin, P.(1993). Game Theory and Strategy. 1a edición. EUA. The Mathematical Association of América.

Watson, J. (2007). An Introduction to Game Theory. 2a edición. EUA. W. W. Norton.

Glosario

A

Acciones de cada jugador: Son las decisiones que puede tomar cada jugador en el momento en que le toque jugar. El conjunto de acciones de un jugador en cada momento del juego puede ser finito o infinito.

Análisis del comportamiento estratégico: El análisis formal de una situación de comportamiento estratégico inicia con la formulación de un juego.

Análisis de decisiones: Consiste en un conjunto de técnicas y procedimientos orientados a reducir el margen de error en las decisiones adoptadas en el marco de una situación específica.

Los elementos que lo conforman son:

- El Objetivo o problema a solucionar
- Las alternativas de elección.
- Los atributos o condiciones y su valoración.
- La probabilidad asociada a cada alternativa.

El decisor está interesado en tomar la mejor alternativa posible que maximice sus beneficios.

Aversión al riesgo: Implica la exigencia de un mayor beneficio en la medida en que se deba asumir mayor riesgo.

C

Comportamiento estratégico: Es un comportamiento que toma en cuenta las decisiones de los demás, atendiendo a sus propios deseos; afectan el resultado de las decisiones propias.

Cooperación: Obrar conjuntamente con otros individuos para alcanzar un fin común.

Conflicto: Asunto o problema de difícil solución.

Competencia perfecta: Modelo de mercado caracterizado por gran cantidad de oferentes y demandantes, de tal manera que ninguno de ellos puede incidir en las condiciones del mercado; productos homogéneos; perfecta información; libre de intervención estatal e inexistencia de barreras al ingreso o salida.

D

Distribución de probabilidad: Lista de todos los resultados de un experimento y la probabilidad que se asocia con cada uno de ellos.

Dominancia iterativa: Es un procedimiento mediante el cual un jugador no considera aquellas estrategias de los otros jugadores que están dominados estrictamente.

Existen dos premisas básicas a considerar:

- Si una estrategia pura está estrictamente dominada, ya sea por una estrategia pura o una mixta, no existen creencias para las cuales convenga usarla.
- Si una estrategia pura no está estrictamente dominada ni por una estrategia pura ni por una mixta. Necesariamente existen algunas creencias acerca de lo que hará el otro jugador para las cuales le conviene usarla.

E

Eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas: Cuando un jugador tiene una estrategia con las características de que le proporciona mejores resultados que sus demás estrategias, no importando qué hagan los demás jugadores, dicha estrategia es identificada como una estrategia fuertemente dominante, y es esta estrategia la que le conviene utilizar.

En el juego en forma normal $G=\{S_1,\ldots,S_n;u_1,\ldots,u_n\}$, sean s'_i y s''_i posibles estrategias del jugador *i* (s'_i y s''_i son elementos de S_i). La estrategia s'_i está estrictamente dominada por la estrategia s''_i si para cada combinación posible de las estrategias de los restantes jugadores, la ganancia de *i* por utilizar s'_i es estrictamente menor que la ganancia de *i* por utilizar s''_i: $u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s'_i,s_{i+1},\ldots,s_n)<u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s''_i,s_{i+1},\ldots,s_n)$.

Para cada $(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$ que puede ser construida a partir de los espacios de estrategias de los otros jugadores $s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n$.

Los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas, pues no es óptimo utilizarlas.

Equilibrio de Nash: Es un perfil de estrategias en el que las estrategias de todos los jugadores son las mejores respuestas a las demás estrategias del perfil.

En el juego en forma normal de n jugadores, $G=\{S_1,\ldots,S_n;u_1,\ldots,u_n\}$, las estrategias $(s^*_1,\ldots,s^*_n)$ forman un equilibrio de Nash (EN) si, para cada jugador *i*, s^*_i es la mejor respuesta del jugador *i* (o al menos una de ellas) a las estrategias de los otros *n-1* jugadores, $(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1},s^*_{i+1},\ldots,s^*_n)$:

$$u_i(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1},\ s^*_i,\ s^*_{i+1},\ldots,s^*_n) >= u_i(s^*_1,\ldots,s^*_{i-1},\ s_i\ ,s^*_{i+1},\ldots,s^*_n).$$

Para cada posible estrategia s_i en S_i; esto es, s^*_i es una solución de

$$\max u_i\ (s^*_1,\ldots,s^*_{i-1},s_i,s^*_{i+1},\ldots,s^*_n)\ s_i\ \varepsilon\ S_i.$$

Esperanza matemática E(X): Es la suma de la probabilidad de cada posible suceso multiplicado por la frecuencia de dicho proceso, es decir si tenemos una variable cuantitativa discreta X con *n* posibles sucesos $x_1,x_2,\ldots,x_n$ y probabilidades $P(X=x_i)=P_i$ la esperanza matemática es

$$\boldsymbol{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,.\,P(X=x_i)=x_1.\,P(X=x_1)+\cdots+x_n.\,P(X=x_n)}$$

Estrategia: Es una descripción de una acción o acciones a seguir bajo cualquier circunstancia que se pueda encontrar en el juego.

Estrategias disponibles: Es el conjunto de estrategias con que cuenta cada jugador, se denota: S= {S_1,…S_n}.

Estrategia mixta: Es una distribución de probabilidades sobre alguna o todas las estrategias puras del juego. Una estrategia mixta para el jugador *i*, m_i, es una distribución de probabilidades sobre su conjunto de estrategias puras S_i.

Si el jugador *i* tiene k_i estrategias puras, $S_i = (S_1, S_2,\ldots S_k)$, entonces una estrategia mixta para el jugador *i* será una distribución de probabilidad $m_i = (m_i(S_1),\ldots m_i(Sk_i))$ con $m_i\ (S_j) \geq 0$ para j=1,... k_i y $m_i\ (S_1) +\ldots+ m_i\ (Sk_i) = 1$, siendo $m_i\ (S_j)$ la probabilidad con que el jugador *i* jugará su estrategia pura S_j.

Una estrategia mixta consiste en el uso de un mecanismo aleatorio para prescindir del uso real de una mecanismo concreto o determinístio. Lo importante de una estrategia mixta es que hace impredecible saber qué hará el jugador que la usa. La estrategia mixta de un jugador se refiere simplemente a lo que ocurre en la mente del otro jugador.

Equilibrio de Nash con estrategias mixtas: En las estrategias mixtas el equilibrio de Nash es aquel en el que cada agente elige la frecuencia óptima con la que seguirá sus estrategias, dadas la frecuencia que elija el otro (Varian, 1996).

Una combinación de estrategias mixtas (m_1,… m_n) es un equilibrio de Nash del juego (S_1,… S_n; U_1,… U_n) si para todo jugador *i* en N se cumple que: $EU_i(m_1,\ldots m_{i-1},m_i,m_{i+1}) \geq EU_i(m_1,\ldots m_{i-1},m'_1,m_{i+1},\ldots,m_n)$ para toda estrategia mixta m'_i en M_i.

Estrategias de seguridad: En los juegos de suma cero, cuando un jugador intenta maximizar su pago, a la vez está intentando minimizar el pago de su oponente. Cada jugador considera el peor resultado que puede conseguir con cada una de sus estrategias y después escoge la estrategia que le proporciona el mejor de los peores resultados.

Para cada estrategia pura $I_i \in E_1$, el nivel de seguridad del jugador I, es el pago que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador II.

$$v_I\,(I_i) = \min_j a_{ij}$$

Para cada estrategia pura $II_j \in E_2$, el nivel de seguridad del jugador II, es el pago que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador I.

$$v_{II}\,(II_i) = \max_i a_{ij}$$

I

Interacciones estratégicas: Son situaciones en las que las consecuencias de las acciones de los individuos dependen de las acciones de otros; y esta interdependencia mutua es reconocida por los involucrados y afecta las acciones que realizarán.

J

Jugadores: Son los participantes en el juego que toman decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Puede tratarse de dos o más (n jugadores).

Juegos: Consisten en una identificación completa de los jugadores, una lista para cada jugador con cada curso de acción disponible para ellos (incluyendo acciones que dependen de medidas tomadas por otros, o de eventos al azar).

Juego en forma normal o estratégica: Se denota por $G = \{S_1,.....,S_n; u_1,.....,u_n\}$, y se compone de tres elementos esenciales:

- Los "n" jugadores que participan en el juego.
- Las estrategias disponibles para cada jugador.
- El conjunto de funciones de pago (utilidad o bienestar) de cada jugador en cada combinación posible de estrategias.

Bajo esta forma los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea (sin conocer las decisiones del resto de los jugadores).

Juegos de suma cero: Son juegos en los que dos individuos compiten por un único premio. Son aquellos en los que no hay ninguna posibilidad de cooperación; la única forma en la cual un jugador puede aumentar su bienestar es reduciendo el de su oponente.

$$u_1 (s_1 , s_2) + u_2 (s_1 , s_2) = 0, \quad s_1 \text{ en } S_1 , s_2 \text{ en } S_2$$

Juegos de suma no cero: Juegos en los que cada participante puede obtener un premio de forma simultánea.

Juegos de suma constante: La suma de los beneficios de los dos jugadores es constante y corresponde a la idea de una cantidad fija que se ha de repartir entre los jugadores en cuestión. Este tipo de juegos se puede convertir en juegos de suma cero. Un juego de dos jugadores es de suma constante si $u_1(s_1,s_2) + u_2(s_1,s_2) = c$, $c \in R$, $\forall\, s_1 \in S_1$, $\forall\, s_2 \in S_2$

M

Maximin: El valor Maximin (o valor inferior del juego) del jugador I es.

$$v_{I} = \max_{i} v_I (I_i) = \max_{i} \min_{j} a_{ij}$$

Una estrategia de seguridad o estrategia Maximin es la que proporciona al jugador su valor Maximin.

Minimax: El valor minimax (o valor superior del juego) del jugador II es.

$$v_{II} = \min_{i} v_{II} (II_i) = \min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

Una estrategia de seguridad o estrategia minimax es la que proporciona al jugador su valor minimax.

Monopolio natural: Es aquel en que el tamaño mínimo eficiente al que puede operar una empresa es tan grande en relación con el tamaño del mercado, que sólo hay lugar para que opere de manera rentable una empresa.

P

Pagos: Cada jugador recibe un pago al terminar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado del juego. El significado de dicho pago es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado, es decir la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego.

Pensamiento estratégico: Supone la posibilidad de plantear de manera anticipada situaciones para establecer criterios de valor sobre las diferentes alternativas de acción y ponerlos en relación con los resultados posibles.

Perfil estratégico: Representa una combinación de estrategias posibles para cada jugador.

Prima de riesgo: Es la cantidad que un agente averso al riesgo, está dispuesto a pagar para librarse del riesgo.

Probabilidad: Un valor entre cero y uno, inclusive, que describe la posibilidad relativa de que algo ocurra. La probabilidad es un número real que toma valores entre 0 y 1; $0 \leq P_i \leq 1$.

Punto de silla de montar: Los valores Maximin y Minimax son equivalentes al concepto de "punto de silla de montar".

Un resultado de un juego es llamado "punto de silla de montar" si el ingreso de un resultado es menor que o igual a cualquier ingreso en su fila, y más grande qué o igual que cualquier entrada/ingreso en su columna.

Un juego matricial de matriz A= (a_{ij}) tiene un punto de silla en estrategias puras cuando se verifica que: $v_I = v_{II}$ Este valor común se llama valor del juego y es el menor elemento de su fila y el máximo de su columna. Se denota por *v*.

Si una matriz de un juego tiene un "punto de silla de montar" (PSM), ambos jugadores jugarían una estrategia en la cual está contenida.

Para cualquier matriz de un juego, si hay un número *i* tal que el jugador 1 tiene una estrategia, la cual garantiza que ganará al menos *i*, y el jugador 2 tiene una estrategia la cual le garantiza que el jugador 1 ganará no más que *i*, entonces *i* es llamado "el valor del juego".

Si un jugador tiene un PSM, el ingreso del PSM es el valor del juego.

R

Racionalidad: Capacidad humana que permite pensar, evaluar y actuar de acuerdo a ciertos principios de optimidad y consistencia, para satisfacer algún objetivo o finalidad. Usando la razón, el ser humano intenta elegir para conseguir los mayores beneficios. El ejercicio de la racionalidad está sujeto a principios de optimidad y consistencia. Cualquier construcción mental llevada a cabo mediante procedimientos racionales tiene por tanto una estructura lógico-mecánica distinguible.

Resultado de un juego: Es un conjunto de acciones llevadas a cabo por los jugadores (y las ganancias asociadas a las mismas). Los resultados de juego no se pueden deducir sólo de las estructuras del juego, sino que requieren además de un concepto de solución plausible, o sea, una especificación de cómo podrían jugar los implicados.

T

Teoría de juegos: Es el estudio de problemas de decisión multipersonales. Es el estudio de modelos matemáticos que describen el conflicto y la cooperación entre entes inteligentes que toman decisiones. Tales decisiones se consideran estratégicas, es decir que los entes que participan en el juego actúan teniendo en cuenta las acciones que puede tomar el resto de jugadores.

Teorema de Nash: Todo juego con un número finito de jugadores y un número finito de estrategias para cada jugador tiene al menos un equilibrio de Nash si se permite el uso de estrategias mixtas.

U

Utilidad: Son las ganancias de cada jugador en cada combinación posible de estrategias. Se denota U= $\{u_1,\ldots.u_n\}$

Utilidad esperada: Para el jugador i deriva de la combinación de estrategias mixtas (m_1, m_2,… m_n) es

$$Eu_i\,(m_{1,\ldots,m_n}) = \Sigma_{(s_1,\ldots s_n)\in S}\; s_{1,\ldots,s_n}\left[m_{1\,(s_1)}\ldots m_{n(s_n)}\right]$$

La utilidad esperada que obtiene el jugador *i* con una combinación de estrategias mixtas es igual al valor esperado de las utilidades que obtiene con las distintas combinaciones de estrategias puras. Para calcular este valor esperado se utilizan las probabilidades que especifican las estrategias mixtas.

Lista de símbolos

La siguiente lista está compuesta por los símbolos que se utilizan frecuentemente en la temática de Teoría de Juegos:

=	Igual a
>	Mayor a
<	Menor a
≥	Mayor o igual a
≤	Menor o igual a
∴	Por lo tanto
∀	Para todo elemento
∃	Existe al menos un elemento
∄	No existe
∑	Sumatoria
∈	Pertenece a
∉	No pertenece a
⇒	Entonces
∨	o
∧	y
∆	Incremento
| |	Valor absoluto
∞	Infinito
⇔	Sí y solo si

La Teoría de Juegos es una rama de la Economía, sustentada en las matemáticas, que estudia las decisiones de un individuo o de una empresa, quienes para tener el éxito buscado deben tener en cuenta las decisiones tomadas por el resto de los agentes que intervienen en una situación determinada o en un juego estratégico; de la misma manera, los demás agentes actuarán pensando según crean que van a ser nuestras actuaciones. Se analizan los métodos de actuación y comportamiento de las personas con base en predicciones que las personas hacen de las decisiones de los otros participantes en el juego estratégico.

Visitia nuestro sitio web
escaneado este código